历年考研数学真题下载：2008 年考研数学二真题答案

历年考研数学真题一向是备战考研考生最重视的复习资料，考生可以通过历年考研数学真题来了解及预测下一年考研数学命题特点以及考查的重点题型，为了方便大家系统的使用历年考研数学真题，文都考研整理了 2000 年至 2016 年考研数学一、数学二、数学三的真题及答案解析，帮助考生备战 2018 考研数学，以下是 2008 年考研数学二真题答案：

一，选择题：(本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)=x^2(x-1)(x+2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为【　　】.

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【答案】应选(D).

【详解】$f'(x)=4x^3+3x^2-4x=x(4x^2+3x-4)$.

令 $f'(x)=0$，可得 $f'(x)$ 有三个零点. 故应选(D).

(2)曲线方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 在几何上表示【　　】.

(A) 曲边梯形 $ABCD$ 的面积.　　(B) 梯形 $ABCD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.　　(D) 三角形 ACD 面积.

【答案】 应选(C).

【详解】 $\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=af(a)-\int_0^a f(x)dx$，

其中 $af(a)$ 是矩形面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形 ACD 的面积. 故应选(C).

(3)在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意的常数）为通解的是【　　】.

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

【答案】 应选(D).

【详解】由 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$，可知其特征根为

$\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=\pm 2i$，故对应的特征值方程为

$$(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=(\lambda-1)(\lambda^2+4)$$

$$=\lambda^3+4\lambda-\lambda^2-4$$

$$=\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda-4$$

所以所求微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$. 应选(D).

(4) 判定函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x-1|}$，$(x>0)$ 间断点的情况【　　】.

(A) 有一个可去间断点，一个跳跃间断点．(B) 有一跳跃间断点，一个无穷间断点．
(C) 有两个无穷间断点．(D)有两个跳跃间断点．

【答案】 应选(A).

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是【　　】.

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛．　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛．

【答案】 应选(B).

【详解】若若 $\{x_n\}$ 单调，则由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界知，若 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，因此若 $\{f(x_n)\}$ 收敛．故应选(B).

(6)设函数 $f(x)$ 连续，$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=u^2,u>1$，若 $F(u,v)=\iint\limits_D \dfrac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2-v^2}}dudv$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$【　　】.

(A) $vf(u^2)$　　(B) $vf(u)$　　(C) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$

【答案】 应选(A).

【详解】利用极坐标，得

$$F(u,v)=\iint\limits_D \frac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2-v^2}}dudv=\int_0^v dv\int_1^u \frac{f(r^2)}{r}rdr=v\int_1^u f(r^2)dr$$

，所以 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$．故应选(A).

(7)设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．若 $A^3=0$，则下列结论正确的是【　　】.

(A) $E-A$ 不可逆，则 $E+A$ 不可逆．　　(B) $E-A$ 不可逆，则 $E+A$ 可逆．
(C) $E-A$ 可逆，则 $E+A$ 可逆．　　(D) $E-A$ 可逆，则 $E+A$ 不可逆．

【答案】应选(C).

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$．

故 $E-A$，$E+A$ 均可逆．故应选(C).

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上，与 A 合同矩阵为【　　】.

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$．　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$．　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$．　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$．

【答案】 应选(D).

【详解】$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，记 $D=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，则

$|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，正负惯性指数相同.故选 D.

二、填空题：(9－14 小题，每小题 4 分，共 24 分．把答案填在题中横线上.)

(9)已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^x-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$

【答案】 应填2 .

(10)微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是______________ .

【答案】 应填 $y=x(C-e^{-x})$.

(11)曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 的切线方程为______________ .

【答案】 应填 $y=x+1$.

【详解】

(12)曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为__________ .

【答案】 $(-1,-6)$.

【详解】

(13)设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$__________ .

【答案】 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$.

(14)设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$__________.

【答案】应填 -1 .

三、解答题(15－23 小题，共 94 分).

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【详解 1】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}$（或$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{3x^2}$，或$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)}{3x^2}$）

$=\dfrac{1}{6}$.

【详解 2】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4 x}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{t^2}{2}}{3t^2}$（或$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{6t}$）

$=\dfrac{1}{6}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du\end{cases}$ 确定，其中 $x=x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【详解 1】由 $\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得

$e^x dx=2tdt$，积分得 $e^x=t^2+C$.

由条件 $x|_{t=0}=0$，得 $C=1$，即 $e^x=t^2+1$，

故 $x=\ln(1+t^2)$.

方程组$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$两端同时对$t$求导得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{dy}{dt}=2t\ln(1+t^2) \end{cases}.$$

所以$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$，

从而$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left[(1+t^2)\ln(1+t^2)\right]}{dx}=\dfrac{\frac{d\left[(1+t^2)\ln(1+t^2)\right]}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1].$$

17（本题满分 9 分）计算$\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

【详解 1】 由于$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故$\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$是反常积分.

令$\arcsin x=t$，有$x=\sin t$，$t\in[0,\dfrac{\pi}{2})$.

$$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{t}{2}-\frac{\cos 2t}{2})dt$$

$$=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}td\sin 2t=\frac{\pi^2}{16}-\frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}.$$

【详解 2】 $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2d(\arcsin x)^2$

$$=\frac{1}{2}x^2(\arcsin x)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx$$

$$=\frac{\pi^2}{8}-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx$$

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\frac{\pi}{2})$．

$$\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin 2tdt$$

$$=-\frac{1}{4}(t^2\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2tdt)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4},$$

所以 $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$．

(18)(本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y),0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$．

【详解】将区域 D 分成如图所示得两个子区域 D_1,D_2 和 D_3．于是

$$\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy=\iint\limits_{D_1}\max\{xy,1\}dxdy+\iint\limits_{D_2}\max\{xy,1\}dxdy+\iint\limits_{D3}\max\{xy,1\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}xydxdy+\iint\limits_{D_2}1dxdy+\iint\limits_{D3}1dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^2dx\int_{\frac{1}{x}}^2xydy+\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^2dy+\int_{\frac{1}{2}}^2dx\int_0^{\frac{1}{x}}dy$$

$$=\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2.$$

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$．对任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0,x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体，若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

【详解】根据题意，因为

旋转体体积$V=\pi\int_0^t f^2(x)dx$，侧面积$S=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

所以 $$2\pi\int_0^t f^2(x)dx=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

上式两边同时对t求导得

$$f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}.$$

解得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1$，$y+\sqrt{y^2-1}=Ce^t$.

由$y(0)=1$，得$C=1$.

所以 $y+\sqrt{y^2-1}=e^t$ 或 $y=f(x)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$.

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\eta\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数$\varphi(x)$具有二阶导数，且满足$\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点$\xi\in(1,3)$，使得$\varphi''(\xi)<0$.

【证法 1】若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则必存在最大值M和最小值m．即

$$m\le f(x)\le M，\quad x\in[a,b]$$

于是有

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

即

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

根据闭区间上连续函数的介值定理，在$[a,b]$上至少存在一点$\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\eta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

因此而的证.

（II）存在$\eta\in[2,3]$，使得$\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)$.

由$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)$，知$\eta\in(2,3]$.

由 $\varphi(2) > \varphi(1)$，利用微分中值定理，存在 $\xi_1 \in (1,2)$，使得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} > 0 .$$

由 $\varphi(2) > \varphi(\eta)$，利用微分中值定理，存在 $\xi_2 \in (2,\eta)$，使得

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2} < 0 .$$

存在存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (1,3)$，使得

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0 .$$

（21）(本题满分 11 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值.

【详解 1】作拉格朗日函数

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4) .$$

令

$$\begin{cases} F_x' = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y' = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F_z' = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

解之得 $(x_1,y_1,z_1) = (1,1,2),(x_2,y_2,z_2) = (-2,-2,8),$ 故所求得最大值为 72, 最小值为 6.

【详解 2】由题意知，$u = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2$ 在条件 $x + y + x^2 + y^2 = 4$ 下的最值.

令 $\begin{cases} F_x' = 4x^3 + 4xy^2 + 2x + \lambda(1+2x) = 0 \\ F_y' = 4y^3 + 4x^2y + 2y + \lambda(1+2y) = 0 \\ x + y - 4 + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} F_x' = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y' = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F_z' = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

解之得$(x_1, y_1, z_1) = (1,1,2), (x_2, y_2, z_2) = (-2,-2,8)$, 故所求得最大值为 72, 最小值为 6.

(22) (本题满分 12 分).

设n元线性方程组$Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

（I）证明行列式$|A| = (n+1)a^n$；

（II）当a为何值时，该方程组有惟一解，并求x_1.

（III）当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求其通解.

【详解】(I)【证法 1】数学归纳法．记$D_n = |A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

以下用数学归纳法证明$D_n = (n+1)a^n$.

当$n = 1$时，$D_1 = 2a$，结论成立.

当$n = 2$时，$D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$，结论成立.

假设结论对小于n的情况成立．将D_n按第一行展开得

$$D_n = 2aD_{n-1} - \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

$$= 2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2}$$

$$= (n+1)a^n$$

故 $|A| = (n+1)a^n$.

【注】本题（1）也可用递推法．由 $D_n = \cdots = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$ 得，$D_n - aD_{n-1} = a(D_{n-1} - aD_{n-2}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - a^{n-2}D_1) = a^n$．于是 $D_n = (n+1)a^n$

(1)【证法 2】消元法．记 $|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

$$\xlongequal{r_2 - \frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$$

$$
\xlongequal{r_3-\frac{2}{3}ar_2}\begin{vmatrix}
2a & 1 & & & & & \\
0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & & \\
 & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & & \\
 & & a^2 & 2a & 1 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & a^2 & 2a & 1 \\
 & & & & & a^2 & 2a
\end{vmatrix}_n
$$

$=\cdots\cdots$

$$
\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}\begin{vmatrix}
2a & 1 & & & & \\
0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\
 & a^2 & 2a & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\
 & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a
\end{vmatrix}_n
$$

$=(n+1)a^n$.

（II）【详解】当 $a\neq 0$ 时，方程组系数行列式 $D_n\neq 0$，故方程组有惟一解．由克莱姆法则，将 D_n 得第一列换成 b，得行列式为

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & & & & \\
0 & 2a & 1 & & & \\
 & a^2 & 2a & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a^2 & 2a & 1 \\
 & & & & a^2 & 2a
\end{vmatrix}_n
=
\begin{vmatrix}
2a & 1 & & & & \\
a^2 & 2a & 1 & & & \\
 & a^2 & 2a & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a^2 & 2a & 1 \\
 & & & & a^2 & 2a
\end{vmatrix}_{n-1}
=D_{n-1}=na^{n-1}
$$

所以，$x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{a}{(n+1)a}$.

（III）【详解】 当 $a=0$ 时，方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵得秩和增广矩阵得秩均为$n-1$，所以方程组有无穷多组解，其通解为

$x=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$，其中$k$为任意常数.

(23) (本题满分 10 分)

设A为 3 阶矩阵，α_1,α_2为A的分别属于特征值$1,-1$的特征向量，向量α_3满足

$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_1$，

(I)证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

(II)令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求$P^{-1}AP$.

【详解】(I)【证明】设有一组数k_1,k_2,k_3，使得 $k\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$.

用A左乘上式，得$k_1(A\alpha_1)+k_2(A\alpha_2)+k_3(A\alpha_3)=0$.

因为 $A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_1$，

所以 $-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

即$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$.

由于α_1,α_2是属于不同特征值得特征向量，所以线性无关，因此

$k_1=k_3=0$，从而有$k_2=0$.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(II)由题意，$AP=P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 而由(I)知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，从而$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆. 故

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$