2016 考研数学一真题及答案解析

来源：文都教育

一、选择题：18 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）

（A）　$\alpha<1$ 且 $b>1$.

（B）　$\alpha>1$ 且 $b>1$.

（C）　$\alpha<1$ 且 $a+b>1$.

（D）　$\alpha>1$ 且 $a+b>1$.

解析： $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\cdot\frac{1}{x^a(1+x)^b}=1,\lim\limits_{x\to\infty}x^{a+b}\cdot\frac{1}{x^a(1+x)^b}=1$，因为 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}$ 收敛，所以

$a<1,a+b>1$，选择（C）

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1,\\ \ln x,x\geq 1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）

（A）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1,\\ x(\ln x-1),x\geq 1.\end{cases}$

（B）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1,\\ x(\ln x-1)-1,x\geq 1.\end{cases}$

（C）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1,\\ x(\ln x+1)+1,x\geq 1.\end{cases}$

（D）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1,\\ x(\ln x-1)+1,x\geq 1.\end{cases}$

解析：由原函数的定义知，$f(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$

$x<1,f(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=(x-1)^2+C_1$.

$x>1,f(x)=\int \ln x\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+C_2$.

又原函数必可导，则 $f(x)$ 一定连续.

$\therefore F(x)$ 在 $x=1$ 连续

$\therefore C_1 = C_2 - 1$

$\therefore F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+c, x<1\\ x(\ln x-1)+c+1, x\geq 1\end{cases}$，$c\in R$. 当 $c=0$ 时，选 D.

（3）若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$（ ）

（A） $3x(1+x^2)$

（B） $-3x(1+x^2)$

（C） $\dfrac{x}{1+x^2}$

（D） $-\dfrac{x}{1+x^2}$

解析: 令 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程

$y'+P(x)y^2q(x)$ 的两个解

$\therefore y_1-y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解.

$\therefore -2\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x-2\sqrt{1+x^2}\cdot P(x)=0$

$\therefore -2\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x-2\sqrt{1+x^2}\cdot P(x)=0$

$\therefore P(x)=-\dfrac{x}{(1+x^2)}$.

$\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 是 $y'+P(x)y=g(x)$ 的解.

$[(1+x^2)^2]'+P(x)\cdot(1+x^2)^2=g(x)$

$\therefore 2(1+x^2)\cdot 2x+p(x)\cdot(1+x^2)^2=g(x)$

$\therefore q(x)=4x\cdot 2x+p(x)\cdot(1+x^2)^2$

$$=4x(1+x^2)-\frac{x}{1+x^2}(1+x^2)^2$$

$$=4x(1+x^2)-x(1+x^2)$$

$$=3x(1+x^2)$$

选择 A.

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & \leq 0, \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots, \end{cases}$ 则（　）

（A）　$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B）　$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）　$f(x)$ 是 $x=0$ 处连续但不可导

（D）　$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解析：因 $f(x)=\begin{cases} x, x\leq 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\leq x<\frac{1}{n} \end{cases}$

则 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0, \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\therefore f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

又 $f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$

$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}=\infty$

$\therefore f'(0)$ 不存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

选择 C

（5）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是（　）

（A）$\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 相似.　　（B）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

（C）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$ 相似.　　（D）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

解析：$\because A$ 与 B 相似

$\therefore$ 存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

故 $B^T=P^TA^T(P^{-1})^T=\left[(P^T)^{-1}\right]^{-1}A^T\left[(P^T)^{-1}\right]$ ∴ A^T 与 B^T 相似（A）正确

又 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，故 B^{-1} 与 A^{-1} 相似，（B）正确

$B+B^{-1}=P^{-1}(A+A^{-1})P$，故 $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似，（D）正确，

所以应选（C）.

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）

（A）单叶双曲面　　　　（B）双叶双曲面

（C）椭球面　　　　（D）柱面

解析：

∵ $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

∴此二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(5-\lambda)$$

∴ $\lambda_1=5\quad \lambda_2=\lambda_3=-1$

所以此二次型在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为 $f(y_1,y_2,y_3)=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

∴ $f(x_1,x_2,x_3)\underset{X=QY}{=}5y_1^2-y_2^2-y_3^2=2$ 表示双叶双曲面，所以选（B）

（7）设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$，则（　　）

（A）p 随着 μ 的增加而增加

（B）p 随着 σ 的增加而增加

（C）p 随着 μ 的增加而减少

（D）p 随着 σ 的增加而减少

解析： $P=P\{x\le\mu+\sigma^2\}=P\{\frac{x-\mu}{\sigma}\le\sigma\}=\Phi(\sigma)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，$\Phi(x)$ 是单调增加的，故选（B）.

（8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果，A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2

发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　）

（A）　　（B）　　（C）　　（D）

解析: $P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{9},P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{9},P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{9}$,

类似可求得其它情况下的概率,其分布律如下:

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

所以 $EX=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$,

同理可得 $EY=\frac{2}{3},EX^2=\frac{8}{9},EY^2=\frac{8}{9}$,

$EXY=\frac{2}{9},Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{4}{9}$,

$DX=EX^2-E^2X=\frac{4}{9},DY=EY^2-E^2Y=\frac{4}{9}$,

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{Dy}}=-\frac{1}{2}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$______.

解析：
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$$
$$=\frac{1}{2}$$

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$______.

解析：

$$\operatorname{rot} A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & Q & R \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & z \end{vmatrix}=j+(y-1)k.$$

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$______.

解析： $x=0,y=1,z=1,$ 对方程两边求偏导：

$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'\left(1-z_x'\right)$， $(x+1)z_y'-2y=x^2\left(f_1'\cdot(-z_y')+f_2'\right)$

$z_x'(0,1)=-1,\ z_y'(0,1)=2,\ dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

(12) 略

(13.) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$______.

解析： $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}+4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$

(14) 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

解析： 因 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2\right)$，则 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，则 $P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma}<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=0.95$，其中 $\alpha=0.05$

μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma Z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma Z_{\frac{\alpha}{2}})$.

又 μ 的置信上限为 10.8，且 $\bar{x}=9.5$，则 $\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.3$

故 μ 的双侧置信区间为 $(9.5-1.3,9.5+1.3)=(8.2,10.8)$。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文

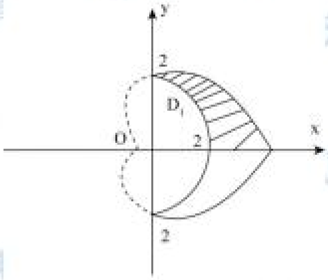
字说明，证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析： 由分析可知 D 的图形如图所示：

由圆和心形线所围成.D 关于 x 轴对称.



$$\therefore \iint_D xdxdy = 2\iint_{D_1} xdxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta dr$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((1+\cos\theta)^3-1\right)\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\times\left(2+\frac{15}{16}\pi\right)$$

$$=\frac{32}{3}+5\pi$$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

（Ⅰ）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

（Ⅱ）若 $y(0)=1, y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解析：（1） $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+k=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+k}<0$

$$\therefore y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=c_1\frac{1}{\lambda_1}e^{\lambda_1 x}\Big|_0^{+\infty}+c_2\frac{1}{\lambda_2}e^{\lambda_2 x}\Big|_0^{+\infty}=-\left(\frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_2}{\lambda_2}\right).$$

$\therefore\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

（2） $\because y(0)=1.\ \ y'(0)=1.$

$$\therefore\begin{cases}c_1+c_2=1\\ \lambda_1c_1+c_2\lambda_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\dfrac{1-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{2+\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}}\\ c_2=\dfrac{\lambda_1-1}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{-2+\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}}\end{cases}$$

$$\therefore\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\left(\frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_2}{\lambda_2}\right)=\frac{3}{k}.$$

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1, L_t$ 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

解析:

$\because \dfrac{\partial f(x\cdot y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$

$\therefore f(x\cdot y)=xe^{2x}\cdot e^{-y}+\varphi(y)$

$\because f(0,\ y)=\varphi(y)=y+1$

$\therefore \varphi(y)=y+1\Rightarrow f(x\cdot y)=xe^{2x-y}+y+1$

而 $\dfrac{\partial f(x\cdot y)}{\partial y}=-xe^{2x-y}+1$

$\therefore I(t)=\int_{L_1}(2x+1)e^{2x-y}dx+(1-xe^{2x-y})dy=\int_{L_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$\therefore \dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow$ 曲线积分与路经联.

$\therefore I(t)=\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx+\int_0^t(1-e^{2-y})dy=t+e^{2-t}$

$I'(t)=1-e^{2-t}$ 令 $I'(t)=0\ \Rightarrow t=2.$

$I'(t)=e^{2-t}, I''(t)|_{t=2}=1\geq 0$

$\therefore$ 当 t=2 时 I（t）取极小值，且为最小值.

$\therefore \mathrm{I}(t)$ 的最小值为 $\mathrm{I}(t)\|_{t=2}=3$.

（18）（本题满分 10 分）

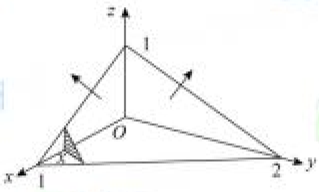
设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析：由高斯公式得

$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x-2+3)dxdydz$

$=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)dxdydz$

$=\int_0^1 dx\iint\limits_{D(X)}(2x+1)dydz=\int_0^1(2x+1)\iint\limits_{D(x)}dydz$



$D(x): y+2z\leq 2-2x$

$$=\int_0^1 (2x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2(1-x)^2\,dx$$

$$=\int_0^1 (2x+1)(x^2-2x+1)dx$$

$$=\int_0^1 (2x^3-3x^2+1)dx$$

$$=(2\cdot\frac{1}{4}x^4-x^3+x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

（19）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2...)$ 证明：

（Ⅰ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

解析：（1）由题意知 $|x_{n+1}+x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|$

$$=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})| \quad \xi\text{介于}x_n\text{与}x_{n-1}\text{之间}$$

$$<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$$

$$<\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

……

$$<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|=|x_2-x_1|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

（2）由第（1）的结论知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛其部分和的极限为 $\lim\limits_{x\to\infty}S_n=\lim\limits_{x\to\infty}(x_{n+1}-x_1)=\lim\limits_{x\to\infty}x_{n+1}-x_1$ 存在，故 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在，

设 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，由于 $f(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，

对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 取极限得 $a=f(a)$，

于是 $f(a)-f(0)=f'(\xi)a$，ξ 位于 0 与 a 之间，

即 $a-1=f'(\xi)a, a=\dfrac{1}{1-f'(\xi)}$，

由条件知 $0<f'(\xi)<\dfrac{1}{2}$，故 $0<a<2$.

20. （本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$.

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求此方程.

解析： $(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & a & 1 & 1 & a\\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4\\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0\end{array}\right)$

（1）当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时 $r(A)=r(A,B)=3$，方程 $AX=B$ 有唯一解

设 $X=(X_1, X_2), B=(b_1, b_2)$,

$AX=A(X_1, X_2)=(AX_1, AX_2)=(b_1, b_2)$,

$\therefore AX_1=b_1$，$AX_2=b_2$

对于 $AX_1=b_1\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}, AX_2=b_2\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}\dfrac{3a}{a+2}\\ \dfrac{a-4}{a+2}\\ 0\end{pmatrix}$.

$\therefore X=(X_1, X_2)=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{3a}{a+2}\\ 0 & \dfrac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

（2）当 $a=1$ 时，$r(A)=r(A,B)=2$，方程 $AX=B$ 有无穷多解

$(A,B)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore AX_1=b_1$ 的通解为 $X_1=k_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$

$AX_2=b_2$ 的通解为 $X_2=\begin{pmatrix}1\\-k_2-1\\k_2\end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix}1&1\\-k_1-1&-k_2-1\\k_1&k_2\end{pmatrix}$ 其中 k_1,k_2 为任意常数

（3）当 $a=-2$ 时，$(A,B)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&0&0&-6\end{array}\right)$

$\because AX_2=b_2$ 无解

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时 $AX=B$ 无解

21、(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解析：

(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=0$ 时解 $(0E-A)x=0$ 即 $Ax=0$

由 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_1=0$ 的无关特征向量 $d_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=-1$ 时 解 $(-E-A)x=0$

$$由 -E-A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 A 对应于 $\lambda_2=-1$ 的无关特征向量 $d_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-2$ 时 解 $(-2E-A)x=0$

$$由 (-2E-A)=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 A 对应于 $\lambda_3=-2$ 的无关特征向量 $d_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=(d_1,d_2,d_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$

$$\therefore A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$其 P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{99}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-2^{99}\\0&-1&-2^{100}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（2）$\because B^2=BA \quad \therefore B^{100}=BA^{99}$

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases}\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2\\ \beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2\\ \beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2\end{cases}$$

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，

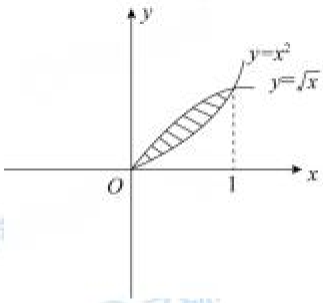
令 $U=\begin{cases}1, X\le Y,\\ 0, X>Y.\end{cases}$

（Ⅰ）写出 (X,Y) 的概率密度；

（Ⅱ）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（Ⅲ）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

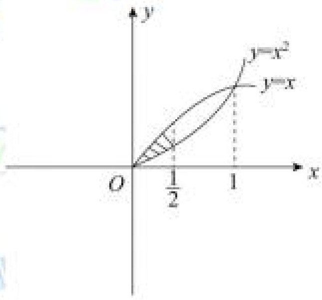
解析（1）区域 D 的面积 $S_D=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$



故 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}3,(x,y)\in D\\ 0,\ 其他\end{cases}$

（2）$P\left\{U=0,\ X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}3dy$

$$=3\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{4}$$



又 $P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}3dy=3\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{2}$

$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_{x\le\frac{1}{2}}^{1}f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$

$=3\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right]=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}$

$\therefore P\left\{U=0,X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\{U=0\}\cdot P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$

故 X 与 U 不独立。

（3）Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+X\le z\}$.

$$=P\{U=0,U+x\le z\}+P\{U=1,U+X\le z\}$$
$$=P\{U=0,X\le z\}+P\{U=1,U\le z-1\}$$
$$=P\{X>Y,X\le z\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$$

①$z<0,F_Z(z)=0.$

②$0\le z<1,F_Z(z)=P\{X>Y,X\le z\}+P(\phi)$

$$=\iint\limits_{\substack{x>y\\x\le z}} f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3\,dy=3\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3\right)=\frac{3}{2}z^2-z^3$$

③$1\le z<2$，

$$F_Z(z)=P\{X>Y\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$$
$$=\frac{1}{2}+\iint\limits_{\substack{x\le y\\x\le z-1}} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}+\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3\,dy$$
$$=\frac{1}{2}+3\left[\frac{2}{3}(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(z-1)^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$$

④$z\ge 2$，$F_Z(z)=1$。

故 Z 的分布函数为$F_Z(z)=\begin{cases}0,z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3,0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2,1\le z<2\\ 1,z\ge 2\end{cases}$。

（23）（本题满分 11 分）

设总体的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,其他\end{cases}$ 其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数，X_1,X_2,X_3为来自总体X的简单随机样本，令$T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

（Ⅰ）求T的概率密度：

（Ⅱ）确定a，使得aT为θ的无偏估计.

解析：（1）因$T=\max(X_1,X_2,X_3)$，则T的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= P\{T \le t\} = P\{\max(X_1, X_2, X_3) \le t\} \\
&= P\{X_1 \le t, X_2 \le t, X_3 \le t\}. \\
&= P\{X_1 \le t\} \cdot P\{X_2 \le t\} \cdot P\{X_3 \le t\} \\
&= F_{X_1}(t) \cdot F_{X_2}(t) \cdot F_{X_3}(t) \\
&= F_X^3(t)
\end{aligned}
$$

因 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{\theta^3}x^3, 0 \le x < \theta \\ 1, x \ge \theta \end{cases}$

$\therefore T$ 的分布函数 $F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \left(\frac{1}{\theta^3}t^3\right)^3, & 0 \le t < \theta \\ 1, & t \ge \theta \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\theta^9}t^9, & 0 \le t < \theta \\ 1, & t \ge \theta \end{cases}$

$\therefore T$ 的概率密度 $F_t(t) = \begin{cases} \frac{9}{\theta^9}t^8, 0 < t < \theta \\ 0, 其他 \end{cases}$

（2）要使 aT 为 θ 的无偏估计，则 $E(at) = \theta$, 即 $aE(T) = \theta$

可得：$a = \frac{\theta}{E(T)}$.

又 $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tF_T(t)dt = \int_0^\theta \frac{q}{\theta q}t^8 \cdot tdt = \frac{9}{10}\theta$.

$\therefore a = \frac{\theta}{\frac{9}{10}\theta} = \frac{10}{9}$.

2016 考研数学（二）真题及答案解析
来源：文都教育

一、选择： 1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）设 $a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1)$, $a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$, $a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x \to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

（A） a_1, a_2, a_3.　　　　（B） a_2, a_3, a_1.

（C） a_2, a_1, a_3.　　　　（D） a_3, a_2, a_1.

解析：选择 B

当 $x \to 0^+$ 时 $\alpha_1 = x\cos\sqrt{x}-1 \sim x\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2$

$\alpha_2 = \sqrt{x}\cdot\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right) \sim x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$

$\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1}-1 \sim \frac{1}{3}x$

∴从低到高的顺序为 $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1$ 选择 B

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), x<1,\\ \ln x, x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

（A） $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x-1), x\geqslant 1.\end{cases}$　　（B） $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x+1)-1, x\geqslant 1.\end{cases}$

（C） $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x+1)+1, x\geq 1.\end{cases}$　　（D） $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x-1)+1, x\geqslant 1.\end{cases}$

解析：由原函数的定义知，$f(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$

$x<1, f(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=(x-1)^2+C_1.$

$x>1, f(x)=\int \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x-1)+C_2.$

又原函数必可导，则 $f(x)$ 一定连续.

∴ $F(x)$ 在 $x=1$ 连续

∴ $C_1=C_2-1$

∴ $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+c, x<1\\ x(\ln x-1)+c+1, x\geq 1\end{cases}$，$c\in R$.当 $c=0$ 时，选 D.

(3) 反常积分①$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$,②$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为

(A) ①收敛，②收敛.　　　　　　(B) ①收敛，②发散.

(C) ①收敛，②收敛.　　　　　　(D) ①发散，②发散.

解析：① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\frac{1}{x}$

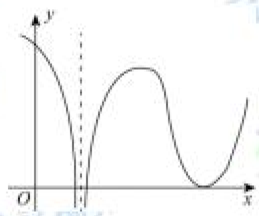
$$=-\left[\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}\right]=-(0-1)=1 \qquad \text{收敛}$$

② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_0^{+\infty}$

$$=-\left[\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}\right]=+\infty \qquad \text{发散}$$

∴应选 B.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 (-∞, +∞) 内连续，其导函数的图形如图所示，则



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，由线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

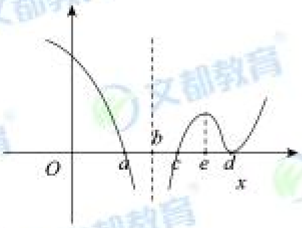
(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，由线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，由线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，由线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(4)**解析**：导函数图形如图

极值的怀疑点为：a,b,c,d



① $\left.\begin{array}{l}\text{当}x<a\text{时}, f'(x)>0\\ \text{当}x>a\text{时}, f'(x)<0\end{array}\right\}\Rightarrow a$ 为极大值点

② $\left.\begin{array}{l}\text{当}x<b\text{时}, f'(x)<0\\ \text{当}x>b\text{时}, f'(x)<0\end{array}\right\}\Rightarrow a$ 不是极值点

③ $\left.\begin{array}{l}\text{当}x<c\text{时}, f'(x)<0\\ \text{当}x>c\text{时}, f'(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow c$ 为极小值点

④当 $x<d$ 和 $x>d$ 时，$f'(x)>0$　故 $x=d$ 不是极值点

∴有 2 个极值点　　排除 C，D.

又 $\left.\begin{array}{l}\text{当}x<b\text{时}, f'(x)\downarrow \;\therefore f''(x)<0\\ \text{当}b<x<c\text{时}, f'(x)\uparrow \;\therefore f''(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow x=b$ 为拐点.

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}b<x<e\text{时}, f'(x)\uparrow \quad \therefore f''(x)>0 \\ \text{当}e<x<d\text{时}, f'(x)\downarrow \quad \therefore f''(x)<0\end{array}\right\} \Rightarrow x=e \text{ 为拐点.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}e<x<d\text{时}, f'(x)\downarrow \quad \therefore f''(x)<0 \\ \text{当}x>d\text{时}, f'(x)\uparrow \quad \therefore f''(x)>0\end{array}\right\} \Rightarrow x=d \text{ 为拐点.}$$

∴有 3 个拐点，排除 A

∴应选 B.

（5）设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$，若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个邻域内，有

（A）$f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$　　（B）$f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

（C）$f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$　　（D）$f_2(x)\le g(x)\le f_1(x)$

解析：

因 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在 (x_0,y_0) 有公切线，

则 $f_1(x_0)=f_2(x_0), f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$.

又 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在（x_0,y_0）处的曲率关系为 $k_1>k_2$.

因 $k_1=\dfrac{|f_1''(x_0)|}{[1+f_1'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}}$，$k_2=\dfrac{|f_2''(x_0)|}{[1+f_1'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}}$

又 $f_1''(x_0)<0, f_2''(x_0)<0$, 则 $f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0$.

从而在 x_0 的某个领域内 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为凸函数，故 $f_1(x)\le g(x)$，$f_2(x)\le g(x)$, 排除（C）,(D).

令 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$, 则 $F(x_0)=0, F'(x_0)=0, F''(x_0)<0$.

由极值的第二充分条件得 $x=x_0$ 为极大值点.

则 $F(x)\le F(x_0)=0$. 即：$f_1(x)\le f_2(x)$.

综合上述，应选（A）.

（6）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A） $f_x' - f_y' = 0.$　　（B） $f_x' + f_y' = 0.$

（C） $f_x' - f_y' = f.$　　（D） $f_x' + f_y' = f.$

解析：$f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$

$f_x'=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$　$f_y'=\dfrac{0+e^x}{(x-y)^2}=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$

$\therefore f_x'+f_y'=\dfrac{e^x(x-y)-e^x+e^x}{(x-y)^2}=\dfrac{e^x}{x-y}=f$

应选（D）.

（7）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是

（A） $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 相似.

（B） $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

（C） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$ 相似.

（D） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

解析：$\because A$ 与 B 相似

$\therefore$ 存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

故 $B^T=P^TA^T(P^{-1})^T=\left[(P^T)^{-1}\right]^{-1}A^T\left[(P^T)^{-1}\right]$ $\therefore A^T$ 与 B^T 相似（A）正确

又 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，故 B^{-1} 与 A^{-1} 相似，（B）正确

$B+B^{-1}=P^{-1}(A+A^{-1})P$，故 $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似，（D）正确，

所以应选（C）.

（8）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则

（A） $a>1.$　　（B） $a<-2.$

（C） $-2<a<1$　　（D） $a=1$ 与 $a=-2$

解析：二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & -1\\ -1 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda-a & -1\\ -1 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-a+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$$

$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\ \lambda_2=\lambda_3=a-1$

$\because$ 二次型的正、负惯性指数分别为 1，2，则 $\begin{cases}a+2>0\\ a-1<0\end{cases}$

所以 $-2<a<1$，所以选（C）

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为__________.

解析: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^3}{x(1+x^2)}+\dfrac{\arctan(1+x^2)}{x}]=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^3}{1+x^2}-x+\arctan(1+x^2)]=\dfrac{\pi}{2}$，

所以斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$__________.

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{1}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}\sin\dfrac{n}{n}\right)$

$=\int_o^1 x\sin x\mathrm{d}n=\sin1-\cos1$

（11）以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为__________.

解析：$x^2-(x^2-e^x)$ 为对应齐次方程的解，即 e^x 是 $y'-y=0$ 的解;

设非齐次方程为 $y'-y=f(x)$，将 $y=x^2$ 代入得 $f(x)=2x-x^2$，

所求方程为 $y'-y=2x-x^2$.

（12）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则当 $n\geq 2$ 时，$f^{(n)}(0)=$__________.

解析： $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$

$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$

$f''(x)=2+2f'(x)$，$f'''(x)=2f''(x)$，

$f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)(n\geq 2)$，

$f(0)=1, f'(0)=2+2=4, f''(0)=10$

$f^{(n)}(0)=2^{n-1}\cdot 10=5\cdot 2^{n-1}$

（13）已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l.若点 P 的横坐标时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点（1，1）时，l 对时间的变化率是__________.

解析： 设 P 的坐标为 (x,x^3)，则由题意

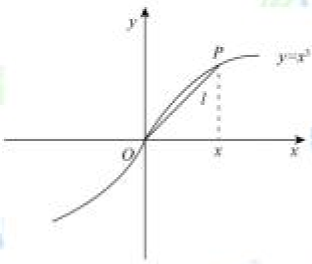
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$

$L=\sqrt{(x^3)^2+x^2}=\sqrt{x^6+x^2}$

则 L 对 t 的变化率为

$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{6x^5+2x}{2\sqrt{x^6+x^2}}\cdot v_0$

$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{x=1}=\frac{8}{2\sqrt{2}}\cdot v_0=2\sqrt{2}v_0$



（14）设矩阵 $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价，则 $a=$__________.

解析： $\because A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价

$\therefore r(A)=r(B)$

$\because B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore r(B)=2$

$\therefore |A|=0$, 即 $\begin{vmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{vmatrix}=0$，得 $a=2$ 或 $a=-1$

当 $a=-1$ 时，$A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，此时 $r(A)=1$ 不合题意

$\therefore a=2$

解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

解析： $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t(x>0)$

当 $0<x<1$ 时

$f_1x_1=\int_0^x|t^2-x^2|\mathrm{d}t=\int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t$

$=x^3-\frac{1}{3}x^3+\int_x^1t^2\mathrm{d}t-x^2(1-x)$

$=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$

故 $f'|x|=4x^2-2x$

当 $x\geqslant1$ 时

$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3}$

故 $f'(x)=2x$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x & 0<x<1\\2x & x\geqslant1\end{cases}$

当 0<x<1 时，令 $f'(x)=4x^2-2x=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$

$f''(x)=8x-2, f''(\frac{1}{2})=2>0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 为最小值点，最小值为 $f(\frac{1}{2})=\frac{4}{3}\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

当 $x\geq 1$ 时，令 $f'(x)=2x=0$ 得 $x=0$(舍)

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

解析：（1）方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ ①两边对 x、y 分别求偏导得

$$2xz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0 \quad ②$$

$$2yz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0 \quad ③$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $\begin{cases} xz+1=0 \\ yz+1=0 \end{cases}$ 解得 $z=0$（舍）或 $y=x$

$\therefore$ 当 $x\neq 0$ 时 $\begin{cases} z=-\frac{1}{x} \\ y=x \end{cases}$ 代入原式 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 得

$$2x^2\times(-\frac{1}{x})+\ln(-\frac{1}{x})+2(2x+1)=0$$

解得 $x=-1, y=-1, z=1$

当 $x=0$ 时 无解

（2）②式两边对 x, y 分别求偏导得

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(-\frac{1}{z^2})(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad ④$$

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \quad ⑤$$

③式两边对 y 求偏导得

$$2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad ⑥$$

将 $x=-1, y=-1, z=1$ 代入⑤⑥得 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2}{3}$

$AC-B^2=\frac{4}{9}>0, A<0$

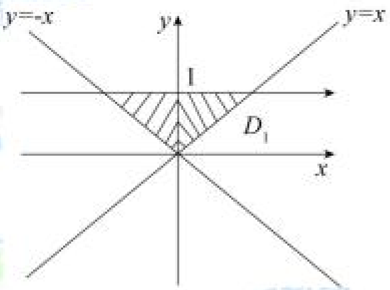
$\therefore x=-1, y=-1$ 为极大值点，极大值为 $z=1$

（18）（本题满分 10 分）

设 D 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$

解析：①积分区域如图：

②D 关于 y 轴对称而 $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 与 $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ 关于 x 为偶函数.



$\therefore \iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\iint\limits_{D1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0$

$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}r\,\mathrm{d}r$

$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}r$

$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 d\theta-\frac{\pi}{4}$

$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-1)\,\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{4}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^2\theta d\theta-\frac{\pi}{2}$

$=\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}.$

（19）（本题满分 10 分）

已知 $y_1(x)=e^x$，$y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)\,y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的解，若

$u(-1)=e,u(0)=-1,$求$u(x)$，并写出该微分方程的通解.

解析：$y_2'(x)=(u'+u)e^x,y_2''(x)=(u''+2u'+u)ex,$代入方程得

$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0,$

令$p=u',p'=u'',$则$(2x-1)p'+(2x-3)p=0$，

解得$p=c(2x-1)e^{-x}$，即$\dfrac{du}{dx}=c(2x-1)e^{-x}$，

解得$u(x)=-c(2x+1)e^{-x}+c_1$，

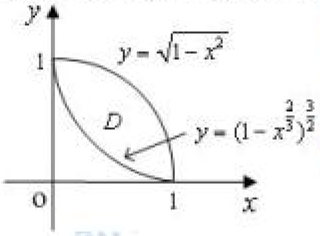
又$u(-1)=e,u(0)=-1,$则$u(x)=-(2x+1)e^{-x}$，

方程的通解为$y(x)=c_1e^x+c_2(2x+1)e^{-x}$.

(20)(本题满分 11 分)

设D是由曲线$y=\sqrt{1-x^2}(0\le x\le 1)$与$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$围成的平面区域，求$D$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

解析：D 的图形如下图所示，D 绕x轴旋转一周所得旋转体的体积可看作两个体积之差，即



$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{\left(-x^2\right)}\right)^2dx-\pi\int_0^1\left[\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2dx\ \ =\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)dx-\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx$$

$$=\pi\times\frac{2}{3}-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6 t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt=\frac{2}{3}\pi-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\left(1-\sin^2 t\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}\pi-3\pi\times\left(I_7-I_9\right)=\frac{2}{3}\pi-3\pi\times\frac{16}{9\times7\times5}$$

$$=\frac{18\pi}{35}$$

表面积$A=A_1+A_2$，其中

$A_1=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2(x)}dx=2\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\pi$，

由$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}(0\le t\le\frac{\pi}{2})$得$y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$，$0\le x\le 1$，

$A_2=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2(x)}dx=2\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\times x^{-\frac{1}{3}}dx=-6\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^4 t\cos t dt$

$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t d(\sin t)=6\pi\times\frac{1}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6\pi}{5}$

故$A=2\pi+\frac{6\pi}{5}=\frac{16\pi}{5}$

(21)(本题满分 11 分)

已知$f(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$内是函数$\frac{\cos x}{2x-3\pi}$的一个原函数$f(0)=0$。

（Ⅰ）求$f(x)$在区间$\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$上的平均值；

（Ⅱ）证明$f(x)$在区间$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$内存在唯一零点.

解析：(1)由题设知$f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt+c.\because f(0)=0\therefore c=0\Rightarrow f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt$

则函数平均值为$\frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx}{\frac{3}{2}\pi-0}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dx\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dt\int_t^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dx$

$=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)dt=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos t dt$

$=\frac{-1}{3\pi}\sin t\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{1}{3\pi}$

(2) $\because f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$

$\therefore$方$x\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$时$f'(x)<0\Rightarrow$当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$时$f(x)$单调减少

而$f(0)=0$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f(x)<0$，即$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内无零点

当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$时，$f'(x)>0$，则当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$时，$f(x)$单调增加.

由题意知，显然 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

而 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx \xlongequal{x=\frac{3}{2}\pi-t} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\pi+u}du$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\pi+t}\right)\sin t\,dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt>0$

由零点函理知：$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 内有唯一的零点。

综上知：$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$ 有唯一零点。

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

解析：$\because Ax=\beta$ 无解

（1）$\therefore |A|=0$，即 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a & 0 & 2a\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 2a\end{vmatrix}=a^2-2a=a(a-2)=0$

$\therefore a=0$或$a=2$

当 $a=0$ 时，

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)$$

$\because r(A)\neq r(A,\beta)$　$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$Ax=\beta$ 无解

当 $a=2$ 时，$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3 & 2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 6 & 2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

$\because r(A)=r(A,\beta)=2<3$　$\therefore a\neq 2$　$\therefore a=0$

（2）当 $a=0$ 时 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$A^T\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\left(A^TA\ \vdots\ A^T\beta\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\3&2&2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&-1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\therefore A^TAX=A^T\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$（其中 k 为任意常数）

(23)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解析：

(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=0$ 时解 $(0E-A)x=0$ 即 $Ax=0$

由 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_1=0$ 的无关特征向量 $d_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=-1$ 时 解 $(-E-A)x=0$

由 $-E-A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_2=-1$ 的无关特征向量 $d_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-2$ 时 解 $(-2E-A)x=0$

由 $(-2E-A)=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_3=-2$ 的无关特征向量 $d_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=(d_1,d_2,d_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$

$\therefore A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}^{-1}$

其 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\therefore A^{99}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-2^{99}\\0&-1&-2^{100}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$

（2）$\because B^2=BA \qquad \therefore B^{100}=BA^{99}$

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases}\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2\\ \beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2\\ \beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2\end{cases}$$

$$\therefore A^{99}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-2^{99}\\0&-1&-2^{100}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（2）$\because B^2=BA \qquad \therefore B^{100}=BA^{99}$

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases}\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2\\ \beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2\\ \beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2\end{cases}$$

2016 考研数学三真题及答案解析

来源：文都教育

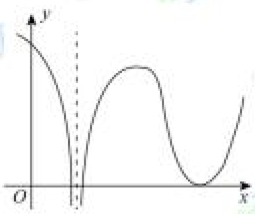
（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数如图所示，则（　　）

（A）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在 2 个拐点

（B）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在 3 个拐点

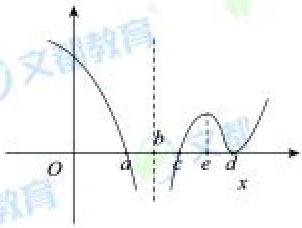
（C）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在 1 个拐点

（D）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在 2 个拐点



解析：导函数图形如图

极值的怀疑点为：a,b,c,d



① $\left.\begin{matrix}当x<a时, f'(x)>0\\ 当x>a时, f'(x)<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a$ 为极大值点

② $\left.\begin{matrix}当x<b时, f'(x)<0\\ 当x>b时, f'(x)<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a$ 不是极值点

③ $\left.\begin{matrix}当x<c时, f'(x)<0\\ 当x>c时, f'(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow c$ 为极小值点

④当 $x<d$ 和 $x>d$ 时，$f'(x)>0$　故 $x=d$ 不是极值点

∴有 2 个极值点　　排除 C，D.

又 $\left.\begin{matrix}当x<b时, f'(x)\downarrow\ \ \therefore f''(x)<0\\ 当b<x<c时, f'(x)\uparrow\ \ \therefore f''(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=b$ 为拐点.

$\left.\begin{matrix}当b<x<e时, f'(x)\uparrow\ \ \therefore f''(x)>0\\ 当e<x<d时, f'(x)\downarrow\ \ \therefore f''(x)<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=e$ 为拐点.

$\left.\begin{matrix}当e<x<d时, f'(x)\downarrow\ \ \therefore f''(x)<0\\ 当x>d时, f'(x)\uparrow\ \ \therefore f''(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=d$ 为拐点.

∴有 3 个拐点，排除 A

∴应选 B.

（2）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A）$f'_x-f'_y=0$

（B）$f'_x+f'_y=0$

（C）$f'_x-f'_y=f$

（D）$f'_x+f'_y=f$

解析：$f(x,y)=\frac{e^x}{x-y}$

$f'_x=\frac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$　　$f'_y=\frac{0+e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{(x-y)^2}$

$\therefore f'_x+f'_y=\frac{e^x(x-y)-e^x+e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{x-y}=f$

应选（D）.

（3）设 $T_i=\iint\limits_{D_i}3\sqrt{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $(i=1,2,3)$ 其中 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

$D_2=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\}$　　$D_3=\{(x,y)|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\}$

则（　）

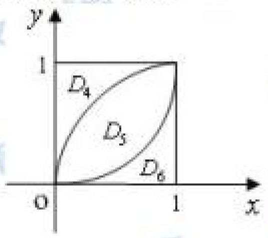
（A）$T_1<T_2<T_3$

（B）$T_3<T_1<T_2$

（C）$T_2<T_3<T_1$

（D）$T_2<T_1<T_3$

解析：如图所示，



$D_1=D_4+D_5+D_6$，$D_2=D_5+D_6$，$D_3=D_4+D_5$，由于被积函数 $3\sqrt{x+y}$ 在 D_1 上为正，所以 $T_2<T_1$，$T_3<T_1$，又因为 $3\sqrt{x+y}$ 在 D_4 上显然大于 D_6 上对应 x 处的值，所以 $T_2<T_3$，故 $T_2<T_3<T_1$，应选(C).

（4）级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$（$k$ 为常数）（　）

（A）绝对收敛
（B）条件收敛
（C）发散
（D）收敛性 k 有关

解析： $\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，

而 $S_n=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ 绝对收敛，选（A）.

（5）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是

（A）$\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 相似.　　（B）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

（C）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$ 相似.　　（D）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

解析： $\because A$ 与 B 相似

$\therefore$ 存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

故 $B^T=P^TA^T(P^{-1})^T=\left[(P^T)^{-1}\right]^{-1}A^T\left[(P^T)^{-1}\right]$ $\therefore A^T$ 与 B^T 相似（A）正确

又 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，故 B^{-1} 与 A^{-1} 相似，（B）正确

$B+B^{-1}=P^{-1}(A+A^{-1})P$，故 $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似，（D）正确，

所以应选（C）.

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则

（A）$a>1$.　　（B）$a<-2$.　　（C）$-2<a<1$　　（D）$a=1$ 或 $a=-2$

解析： 二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-a+1&0\\0&0&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\ \lambda_2=\lambda_3=a-1$

∵二次型的正、负惯性指数分别为1，2，则$\begin{cases} a+2>0 \\ a-1<0 \end{cases}$

所以$-2<a<1$，所以选（C）

（7）设A,B为两个随机事件，且$0<P(A)<1, 0<P(B)<1$,如果$P(A|B)=1$,则（　　）

（A）$P(\overline{B}|\overline{A})=1$　　（B）$P(A|\overline{B})=0$

（C）$P(A\cup B)=1$　　（D）$P(B|A)=1$

解析：因$P(A|B)=1$，则$\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，则$P(B)-P(AB)=0$，则$P(B\overline{A})=0$．从而$P(B|\overline{A})=0$．

又$P(B|\overline{A})+P(\overline{B}|\overline{A})=1$，则$P(\overline{B}|\overline{A})=1$，故选A.

（8）设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim N(1,2), Y\sim N(1,4)$，则$D(XY)=$(　　)

（A）6　　（B）8　　（C）14　　（D）15

解析：因$X\sim \mathrm{N}(1,2), Y\sim(1,4)$，则$EX=1, DX=2, EY=1, DY=4$，

$D(XY)=E\left[(XY)^2\right]-E^2(XY)=E(X^2Y^2)-E^2(XY)$

因X,Y相互独立，则$E\left[X^2Y^2\right]=E(X^2)E(Y^2)$，而$E(X^2)=E^2X+DX=3$，

$E(Y^2)=E^2Y+DY=1+4=5$，则$E(X^2Y^2)=15$，

又$E(XY)=EXEY=1\times1=1$，则$D(XY)=15-1=14$，故选C.

（9）已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$__________.

解析：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin 2x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin 2x}{3\cdot 2x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}f(x)=2$$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)=6$

（10）极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$______.

解析： $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{1}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$$

$$=\int_0^1 x\sin x\,dx=\sin1-\cos1$$

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$ ______.

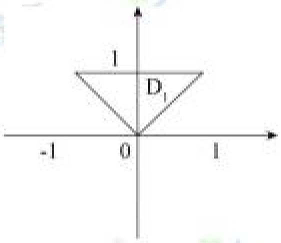
解析： $x=0,y=1,z=1,$ 对方程两边求偏导：

$z+(x+1)z'_x=2xf(x-z,y)+x^2f'_1(1-z'_x)$， $(x+1)z'_y-2y=x^2\left(f'_1\cdot(-z'_y)+f'_2\right)$

$z'_x(0,1)=-1,\ z'_y(0,1)=2,\ dz|_{(0,1)}=-dx+2dy$

(12) 设 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|\le y\le1,-1\le x\le1\}$，则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$ ____________.

解析： 区域D的图像：



$D_1=\{(x,y)|x\le y\le1,0\le x\le1\}$

由对称性知 I=$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=2\iint\limits_{D_1}x^2e^{-y^2}dxdy=2\int_0^1e^{-y^2}dy\int_0^y x^2dx$

$=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy\ \underline{\underline{y^2=t}}\ \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\int_0^1 te^{-t}dt=$

$=-\frac{1}{3}\int_0^1 t\,de^{-t}=-\frac{1}{3}\left[te^{-t}\Big|_0^1-\int_0^1e^{-t}dt\right]$

$=\frac{1}{3}\left(1-2e^{-1}\right)$

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$ ____.

解析： $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$

(14) 设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为____________.

解析： 由分析可知：前三次中只取到了两种颜色的球，最后一次取的球的颜色不能在前

面出现..

例如第四次取到红球，则前三次为两次取白球，一次取黑球；或者一次取白球，两次取黑球.

故所求概率为 $p=\dfrac{C_3^1\times C_3^1\times A_2^2}{3^4}=\dfrac{2}{9}$.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$.

解析： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)\dfrac{1}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\cos 2x+2x\sin x-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x-1}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin -1}{x^4}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+\sin x+2x\cos x}{4x^3}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x-\sin 2x}{x^3}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin -2\cos 2x}{3x^2}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\sin -2\cos 2x}{3x^2}}$$

$$=e^{\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin x-\sin x-x\cos x+4\sin x}{2x}}$$

$$=e^{\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3\sin x-x\cos x+4\sin x}{2x}}$$

$$=e^{\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3\sin x-x\cos x+4\sin x}{x}}$$

$$=e^{\frac{1}{12}(-3-1+8)}$$

$$=e^{\frac{1}{3}}$$

(16) (本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性为

$$\eta=\frac{p}{120-p}(\eta>0)$$

p 为单价(万元).

(Ⅰ) 求需求函数的表达式；

(Ⅱ) 求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义.

解析： (I) 题意知

$-\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dp}=\frac{P}{120-P}$分离变量得

$-\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dP}=\frac{1}{120-P}dP$

两边积分得$Q=C(P-120)$

$Q(D)=1200$得$C=-10$

所以需求函数为$Q(P)=-10(P-120)=10(120-P)$

(II)收益函数为$R(P)=PQ=10P(120-P)=-10P^2+1200P$

边际收益函数为$R'(p)=-20P+1200$

当 P=100 时，边际收益为-800 万元

经济意义为：当价格为 100 万元时，收益亏损 800 万元.

(17)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$, 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

解析：

当$0<x<1$时，$f(x)=\int_0^x(t^2-x^2)dt+\int_x^1(x^2-t^2)dt=\frac{4x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}$,

此时，$f'(x)=4x^2-2x$；

当$x\geq1$时，$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)dt=x^2-\frac{1}{3}$,

此时，$f'(x)=2x$；

所以$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, 0<x<1,\\ 2x, \quad x\geq1.\end{cases}$

当$0<x<1$时，令$f'(x)=4x^2-2x=0$，解得$x=\frac{1}{2}$.

而$f''(\frac{1}{2})=(8x-2)|_{x=\frac{1}{2}}=2$，从而$x=\frac{1}{2}$是极小值点，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$；

当$x\geq1$时，$f'(x)=2x=0$，得$x=0$，舍去；

因此$f(x)$的最小值为$\frac{1}{4}$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求$f(x)$.

解析： 令 $u=x-t$

$\int_0^x f(x-t)dt=-\int_x^0 f(u)du$

$=\int_0^x f(u)du$

$\int_0^x f(u)du=x\int_0^x fuat-\int_0^x tf(u)at+e^{-x}-1$

两边对 x 求导得

$f(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)-e^{-x}$

即 $f'(x)-f(x)=e^{-x}$ 此为一阶线性非齐闪微分方程

通解为 $f(x)=e^{-\int -1dx}\left(\int e^{-x}\cdot e^{-\int -1dx}+dx+c\right)$

$=e^{x}\left(\int e^{-2x}dx+c\right)$

$=e^{x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+c\right)$

又 $f(u)=-1$ 故 $f(u)=C-\frac{1}{2}=-1$

$C-\frac{1}{2}$

$f(x)=-\frac{1}{2}e^{x}\left(e^{-2x}+1\right)$

$=-\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数。

解析: 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(2n+3)}{(n+1)(2n+1)}=1$, 所以收敛半径 $R=1$,

当 $x=\pm1$, 幂级数均收敛, 此幂级数收敛域为 $[-1,1]$;

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^{2n+2}\right)}{(n+1)(2n+1)}$

$s''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^{2n+2}\right)''}{(n+1)(2n+1)}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=2\frac{1}{1-x^2}$

因为 $s(0)=0, s'(0)=0, \int_0^x s''(t)dt=s'(x)-s'(0)=s'(x)=2\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\ln\frac{1+x}{1-x}$

$\int_0^x s'(t)\,\mathrm{d}t = s(x) - (0) = s(x)$

$$s(x) = \int_0^x \ln\frac{1+t}{1-t}dt$$

$$= t\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^x + \int_0^x \frac{d(1-t^2)}{1-t^2}$$

$$= x\ln\frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2)$$

当 $x=\pm1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+2)(2n+1)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\cdots\right)$$

$$= 2\ln 2$$

所以 $s(x) = \begin{cases} x\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2), -1<x<1, \\ 2\ln 2, \qquad x=\pm1. \end{cases}$

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax=\beta$ 无解.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 求方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的通解.

解析: ∵ $Ax=\beta$ 无解

(1) ∴ $|A|=0$, 即 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 2a \end{vmatrix} = a^2-2a = a(a-2)=0$

∴ $a=0$ 或 $a=2$

当 $a=0$ 时,

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

∵ $r(A)\neq r(A,\beta)$ ∴当 $a=0$ 时, $Ax=\beta$ 无解

当 $a=2$ 时, $(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\because r(A)=r(A,\beta)=2<3 \quad \therefore a\neq 2 \quad \therefore a=0$

（2）当$a=0$时 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$A^T\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\left(A^TA\ ,\ A^T\beta\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\3&2&2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&-1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\therefore A^TAX=A^T\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$（其中$k$为任意常数）

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解析：

(1) $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=0$ 时解 $(0E-A)x=0$ 即 $Ax=0$

由$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_1=0$ 的无关特征向量 $d_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=-1$ 时 解 $(-E-A)x=0$

由$-E-A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_2=-1$ 的无关特征向量 $d_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-2$ 时 解 $(-2E-A)x=0$

由$(-2E-A)=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_3=-2$ 的无关特征向量 $d_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=(d_1,d_2,d_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$

$\therefore A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}^{-1}$

其 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\therefore A^{99}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-2^{99}\\0&-1&-2^{100}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（2）$\because B^2=BA \qquad \therefore B^{100}=BA^{99}$

则$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\therefore\begin{cases}\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2\\\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2\\\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2\end{cases}$$

（22）（本题满分 11 分）

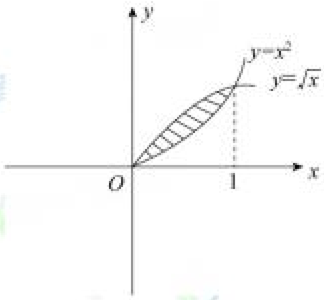
设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$上服从均匀分布，

令$U=\begin{cases}1,X\le Y,\\0,X>Y.\end{cases}$

（Ⅰ）写出(X,Y)的概率密度；

（Ⅱ）问U与X是否相互独立？并说明理由；

（Ⅲ）求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

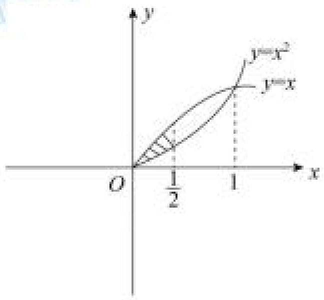


解析（1）区域 D 的面积$S_D=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$

故(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}3,(x,y)\in D\\0,\ 其他\end{cases}$

（2）$P\left\{U=0,\ X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}3dy$

$$=3\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{4}$$



又$P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}3dy=3\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{2}$

$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_{x\le\frac{1}{2}}^{1}f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$

$$=3\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right]=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}$$

$$\therefore P\left\{U=0,X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\{U=0\}\cdot P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$$

故 X 与 U 不独立，

（3）Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+X\le z\}$.

$$=P\{U=0,U+x\le z\}+P\{U=1,U+X\le z\}$$
$$=P\{U=0,X\le z\}+P\{U=1,U\le z-1\}$$
$$=P\{X>Y,X\le z\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$$

①$z<0,F_Z(z)=0$.

②$0\le z<1,F_Z(z)=P\{X>Y,X\le z\}+P(\phi)$

$$=\iint\limits_{\substack{x>y\\x\le z}}f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3\,dy=3\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3\right)=\frac{3}{2}z^2-z^3$$

③$1\le z<2$，

$$F_Z(z)=P\{X>Y\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$$
$$=\frac{1}{2}+\iint\limits_{\substack{x\le y\\x\le z-1}}f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}+\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3\,dy$$
$$=\frac{1}{2}+3\left[\frac{2}{3}(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(z-1)^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$$

④$z\ge2$，$F_Z(z)=1$。

故 Z 的分布函数为
$$F_Z(z)=\begin{cases}0,z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3,0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2,1\le z<2\\ 1,z\ge2\end{cases}$$，

（23）（本题满分 11 分）

设总体的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,其他\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

（Ⅰ）求T的概率密度；

（Ⅱ）确定a，使得$E(aT)=\theta$.

解析：（1）因$T=\max(X_1,X_2,X_3)$，则T的分布函数为

$$F_T(t)=P\{T\le t\}=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}$$
$$=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}.$$
$$=P\{X_1\le t\}\cdot P\{X_2\le t\}\cdot P\{X_3\le t\}$$
$$=F_{X_1}(t)\cdot F_{X_2}(t)\cdot F_{X_3}(t)$$
$$=F_X^3(t)$$

因X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \dfrac{1}{\theta^3}x^3,0\le x<\theta\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$

$\therefore T$的分布函数$F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \left(\dfrac{1}{\theta^3}t^3\right)^3,0\le t<\theta\\ 1, & t\ge\theta\end{cases}=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\theta^9}t^9,0\le t<\theta\\ 1, & t\ge\theta\end{cases}$

$\therefore T$的概率密度$F_t(t)=\begin{cases}\dfrac{9}{\theta^9}t^8,0<t<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

（2）因$E(at)=\theta$,即$aE(T)=\theta$，可得：$a=\dfrac{\theta}{E(T)}$.

又$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tF_T(t)dt=\int_0^{\theta}\dfrac{q}{\theta q}t^8\cdot tdt=\dfrac{9}{10}\theta$，则$a=\dfrac{\theta}{\dfrac{9}{10}\theta}=\dfrac{10}{9}$.