2018 考研数学（三）真题及答案解析（文都版）

来源：文都教育

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin|x|$.

B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

C. $f(x)=\cos|x|$.

D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

答案：（D）

解析：方法一：

（A）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}\sin|x|=0$，可导

（B）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}\sin\sqrt{|x|}=0$，可导

（C）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x}=0$，可导

（D）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$ 不存在，不可导

应选(D).

方法二：

因为 $f(x)=\cos\sqrt{|x|},f(0)=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$$

不存在

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，选（D）

对 (A): $f(x)=x\sin x$ 在 $x=0$ 处可导

对 (B): $f(x)\sim|x|\bullet\sqrt{|x|}=|x|^{\frac{3}{2}}$ 在 $x=0$ 处可导

对 (C): $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处可导.

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则

A.当 $f'(x)<0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0$.　　B.当 $f''(x)<0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0$.

C.当 $f'(x)>0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0$.　　D.当 $f''(x)>0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0$.

答案：（D）

解析：（方法一）取 $f(x)=2x-1$，和 $f(x)=-2x+1$，可排除（A）(C).

取 $f(x)=a(x-\frac{1}{2})^2+b$ ，由 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 得 $b=-\frac{a}{12}$ ，当 $f''(x)=2a<0$ 时，$f(\frac{1}{2})=b=-\frac{a}{12}>0$，排除(B),故选（D）

（方法二）由 Taylor 公式有： $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{1}{2})^2$

当 $f''(x)>0$ 时， $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$,$\xi$ 在 0 和 $x\in$ 间.

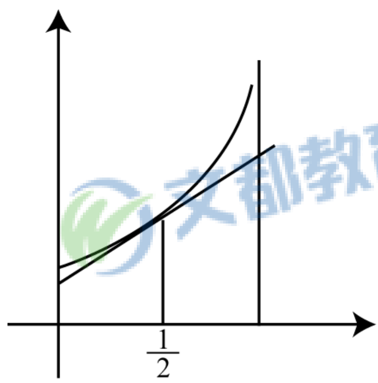
于是 $0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>\int_0^1\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]dx$

$=f\left(\frac{1}{2}\right)+0=f\left(\frac{1}{2}\right)$，应选（D）

(方法三) $f''(x)>0\Rightarrow f(x)$凹$\Rightarrow$

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.



（3）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$, 则

A. $M>N>K$.　　B. $M>K>N$.

C. $K>M>N$.　　D. $K>N>M$.

答案：（C）

解析： $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x$，

$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，因为$e^x>x+1$，所以$\frac{x+1}{e^x}<1$

$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$，$1+\sqrt{\cos x}>1$

即$\frac{1+x}{e^x}<1<1+\sqrt{\cos x}$

所以由定积分的比较性质$K>M>N$，应选（C）.

（4）设某产品的成本函数$C(Q)$可导，其中Q为产量，若产量为Q_0时平均成本最小，则

A. $C'(Q_0)=0$ B. $C'(Q_0)=C(Q_0)$ C. $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$ D. $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$

答案：（D）

解析：平均成本$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}$，$\frac{d\overline{C}}{dQ}=\frac{QC'(Q)-C(Q)}{Q^2}$，

当$Q=Q_0$时，$\overline{C}(Q)$最小，因此$\left.\frac{d\overline{C}}{dQ}\right|_{Q=Q_0}=0$，即$Q_0C'(Q_0)-C(Q_0)=0$，

故$Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$，选(D).

（5）下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

答案：（A）

解析：令$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$则$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\because P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

∴选项为 A

（6）设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，$(X\ Y)$ 表示分块矩阵，则

A. $r(A\ AB)=r(A)$.　　　　B. $r(A\ BA)=r(A)$.

C. $r(A\ B)=\max\{r(A),r(B)\}$.　　　　D. $r(A\ B)=r(A^T\ B^T)$.

答案：（A）

解析：易知选项 C 错

对于选项 B 举反例：取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$

则$BA=\begin{pmatrix}0&0\\3&3\end{pmatrix},(A,BA)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&3&3\end{pmatrix}$

$r(A,BA)\neq r(A)$

对于选项 D，举反例：

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,则 $r(A,B)=2\neq r(A^T,B^T)$

（7）设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则

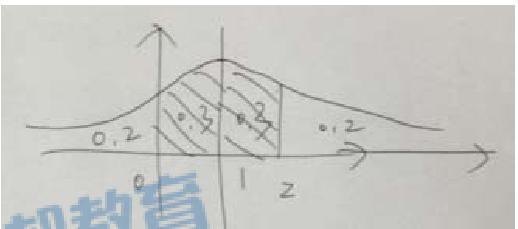
$p\{X<0\}=$.

A.0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

答案：（A）

解析： $f(1+x)=f(1-x)$，故 X 的概率密度关于直线 $x=1$ 对称

于是由$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$ 有：



于是 $P\{X<0\}=0.2$

（8）设 $X_1,X_2,...,X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，令

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$,$S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$,则（　　）

A. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$

B. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

C. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$

D. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$

答案：（B）

解析：总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，得 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

又 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 独立，

故 $\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}=\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}\sim t(n-1)$，应选（B）.

二、填空题：**9~14** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分。

（9）曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是.

答案： $y=4x-3$

解析： $y=x^2+2\ln x$， $y'=2x+\frac{2}{x}$

由$y''=2-\frac{2}{x^2}=0$.可得$x=1, x=-1$(舍去)

当 $x=1$ 时， $y'=4$，则切线方程为 $y=4x-3$.

（10） $\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx=$.

答案： $e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

解析： $\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx$

$=\int \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}de^{x}$

$=e^{x}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\int\frac{e^{x}}{\sqrt{1-\left(1-e^{2x}\right)}}\cdot\frac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$=e^{x}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}+\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$=e^{x}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}d\left(1-e^{2x}\right)$

$=e^{x}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

（11）差分方程：$\Delta^{2}y_{x}-y_{x}=5$ 的通解是.

答案： $y_{x}=C\cdot 2^{x}-5$

解析： 由 $\Delta^{2}y_{x}=\Delta y_{x+1}-\Delta y_{x}=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_{x})=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_{x}$，

得 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$，即 $y_{x+1}-2y_{x}=5$，

齐次差分方程 $y_{x+1}-2y_{x}=0$ 的通解为 $y_{x}=C\cdot 2^{x}$，

而 $y_{x+1}-2y_{x}=5$ 的特解为 $y_{x}^{*}=-5$，

故 $y_{x+1}-2y_{x}=5$ 的通解为 $y_{x}=C\cdot 2^{x}-5$

（12）函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$ 且 $f(0)=2$ 则 $f(1)=$.

答案： $2e$

解析： 因 $f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=2xf\left(x\right)\Delta x+o\left(\Delta x\right),f\left(0\right)=2$，

所以 $f'\left(x\right)=2xf\left(x\right)$，即 $f'\left(x\right)-2xf\left(x\right)=0$，

所以 $f\left(x\right)=Ce^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\int(-2x)dx}=Ce^{x^{2}}$，

又由 $f\left(0\right)=2$，得 $C=2$，

故 $f\left(x\right)=2e^{x^{2}}$，所以 $f\left(1\right)=2e$。

（13）设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_{1},\boldsymbol{\alpha}_{2},\boldsymbol{\alpha}_{3}$ 是线性无关的向量组，若 $\boldsymbol{A\alpha}_{1}=\boldsymbol{\alpha}_{1}+\boldsymbol{\alpha}_{2}$，$\boldsymbol{A\alpha}_{2}=\boldsymbol{\alpha}_{2}+\boldsymbol{\alpha}_{3}$，$\boldsymbol{A\alpha}_{3}=\boldsymbol{\alpha}_{1}+\boldsymbol{\alpha}_{3}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ______.

答案：2

解析：$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)$

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\therefore P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=B$$

$\therefore |A|=|B|=2$

（14）随机事件 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(AC\,|\,A\cup B)=$.

答案：$\dfrac{1}{3}$

解析：$P(AC\,|\,A\cup B)=\dfrac{P(AC\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(AC)}{P(A\cup B)}$

$$=\frac{P(A)P(C)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

三、解答题：**15~23** 小题，共 **94** 分.解答应写出文字说明、证明过程或写出步骤.

（15）（本题满分 10 分）已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求 a,b.

解析：方法一：

$$\lim_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=2\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}[(ax+b)-xe^{-\frac{1}{x}}]=2$$

$$ax+b-xe^{-\frac{1}{x}}$$

$$=ax+b-x\left(1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})\right)$$

$$=(a-1)x+(b+1)+o(1)$$

故$\begin{cases} a-1=0 \\ b+1=2 \end{cases}$，即$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

方法二：

$$\lim_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x}{x}=0 \Rightarrow a=1$$

故$2=\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=b+\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=b+\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=b+1$

所以，$b=1$

（16）（本题满分 10 分）设平面区域D由曲线$y=\sqrt{3(1-x^2)}$与直线$y=\sqrt{3}x$及y轴围成，计算二重积分$\iint\limits_D x^2dxdy$.

解析：由题意可得$y=\sqrt{3}x$与$y=\sqrt{3(1-x^2)}$相交于点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，则

$$\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}x^2dy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2(\sqrt{3(1-x^2)}-\sqrt{3}x)dx=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x^2\sqrt{1-x^2}-x^3\right)dx$$

其中

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2tdt$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2td2t\overset{2t=u}{=}\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 udu=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{32}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{16},$$

故，原式$=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{32}-\frac{1}{16}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{32}-\frac{\sqrt{3}}{16}$.

17.（本题满分 10 分）将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

解析：解析：设圆的周长为x，正方形的周长为y，正三角形的周长为z，则$x+y+z=2$为限制条件.

目标函数为$S=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{z^2}{3^2}=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{12\sqrt{3}}$

方法 1：拉格朗日乘数法

$$L=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{12\sqrt{3}}+\lambda(x+y+z-2)$$

由 $\begin{cases} L'_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ L'_y=\dfrac{y}{8}+\lambda=0 \\ L'_z=\dfrac{z}{6\sqrt{3}}+\lambda=0 \\ L'_\lambda=x+y+z-2=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{A}\times 2 \\ y=\dfrac{8}{A}\times 2 \\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{A}\times 2 \end{cases}$ 这里 $A=2\pi+8+6\sqrt{3}$

由实际问题的背景可知：$S_{\min}=\dfrac{4\pi}{A^2}+\dfrac{16}{A^2}+\dfrac{12\sqrt{3}}{A^2}=\dfrac{4\pi+16+12\sqrt{3}}{A^2}$

$$=\frac{4\pi+16+12\sqrt{3}}{(2\pi+8+6\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$$

方法 2：记 $x_1=\dfrac{x}{\sqrt{4\pi}}$，$y_1=\dfrac{y}{\sqrt{16}}$，$z_1=\dfrac{z}{\sqrt{12\sqrt{3}}}$

则条件变为 $\sqrt{4\pi}x_1+\sqrt{16}y_1+\sqrt{12\sqrt{3}}z_1=2$

目标函数变为：$S=x_1^2+y_1^2+z_1^2$

由 Cauchy 不等式得 $2^2=\left(\sqrt{4\pi}x_1+\sqrt{16}y_1+\sqrt{12\sqrt{3}}z_1\right)^2$

$$=\left[\left(\sqrt{4\pi},\sqrt{16},\sqrt{12\sqrt{3}}\right)\cdot(x_1,y_1,z_1)\right]^2$$

$$\le\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\cdot\left(4\pi+16+12\sqrt{3}\right)$$

所以 $x_1^2+y_1^2+z_1^2\ge\dfrac{4}{4\pi+16+12\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

$$\therefore S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$$

方法 3：$z=2-x-y$

$$S=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{(2-x-y)^2}{12\sqrt{3}} \quad *$$

由 $\begin{cases} S_x' = \dfrac{2x}{4\pi} - \dfrac{2\cdot(2-x-y)}{12\sqrt{3}} = 0 \\ S_y' = \dfrac{2y}{16} - \dfrac{2\cdot(2-x-y)}{12\sqrt{3}} = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$ 代入＊得

$$S_{\min} = \frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$$

（18）（本题满分 10 分）已知 $\cos 2x - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(-1<x<1\right)$. 求 a_n .

解析： $\cos 2x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}$， $-1<x<1$

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n, \ (-1<x<1)$$

原式 $= \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$.

故 $a_n = \begin{cases} 2k, & n = 2k-1 \\ -(2k+1) + \dfrac{(-1)^k 4^k}{(2k)!}, & n = 2k \end{cases}$

（19）（本题满分 10 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足： $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明： ①先证 $x_n > 0$, 易证

②再证 $\{x_n\}$ 单减，由 $e^{x_{n+1}} = \dfrac{e^{x_n}-1}{x_n} = \dfrac{e^{x_n}-e^0}{x_n - 0}$

拉格朗日中值定理 $e^{\xi}, \xi \in (0, x_n)$

$\therefore x_{n+1} = \xi < x_n$

$\therefore \{x_n\}$ 单减有下界，由此得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

③设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, 则

$Ae^A = e^A - 1$

解得： $A=0$

（20）（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数.

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解析：（1） $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 而 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$，

由 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$ 得

当 $a\neq 2$ 时， $r(A)=3$，只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$.

当 $a=2$ 时， $r(A)=2$，方程有无穷多解，通解为 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

（2）由（1）知，

当 $a\neq 2$ 时 A 可逆，令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_1+ax_3 \end{cases}$，即 $Y=AX$，则规范形为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，

当 $a=2$ 时，

法一：$r(A)=2$，令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，则 $f=y_1^2+y_2^2+(y_1+y_2)^2=2(y_1+\frac{1}{2}y_2)^2+\frac{3}{2}y_2^2$，

令 $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}\left(y_1+\frac{1}{2}y_2\right) \\ z_2=\sqrt{\frac{3}{2}}y_2 \\ z_3=y_3 \end{cases}$，则得规范形为 $f=z_1^2+z_2^2$.

法二： $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3=X^T\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}X$

记 $B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&0\\3&0&6\end{pmatrix}$，

令 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-3\\1&\lambda-2&0\\-3&0&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda^3-10\lambda^2+18\lambda=\lambda[(\lambda-5)^2-7]=0$

可得：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=5-\sqrt{7}$，$\lambda_3=5+\sqrt{7}$，则规范型为 $f=z_1^2+z_2^2$.

（21）（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（1）求 a；

（2）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P.

解析：（1）∵ A 经过初得列变换化为 B

$\therefore r(A)=r(B)$

$\because A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&3&-3a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore r(A)=2\quad\therefore r(B)=2$

由 $B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{pmatrix}$

得 $a=2$

（2）令 $P_1=(x_1,x_2,x_3)$，$B=(b_1,b_2,b_3)$

$AP_1=A(X_1,X_2,X_3)=(AX_1,AX_2,AX_3)=(b_1,b_2,b_3)$

$\therefore AX_i=b_i,\ i=1,2,3$

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\1&3&0&\vdots&0&1&1\\2&7&-2&\vdots&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&3&-6&\vdots&-3&-3&-3\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&0&0&\vdots&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&6&\vdots&3&4&4\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&0&0&\vdots&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore AX_1=b_1$ 的通解为 $X_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$，（其中 k_1 为任意常数）

$AX_2=b_2$ 的通解为 $X_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{pmatrix}$，（$k_2$ 为任意常数）

$AX_3=b_3$ 的通解为 $X_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{pmatrix}$，（$k_3$ 为任意常数）

$\therefore P_1=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$（其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数）

$\because |P_1|=\begin{vmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{vmatrix}=(k_2-k_3)\begin{vmatrix}3&4&6\\-1&-1&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=k_3-k_2$

当 $k_2\neq k_3$ 时，P_1 可逆 $\therefore P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$（$k_1$ 为任意常数，$k_2\neq k_3$）

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为：$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$．$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布，令 $Z=XY$．

（1）求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$；

（2）求 Z 的概率分布.

解析：（1）$Cov(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=E(X^2Y)-EX\cdot EX\cdot EY$，

$=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY$

其中，$EX=1\times\frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2}=0$，$EX^2=1^1\times\frac{1}{2}+(-1)^2\times\frac{1}{2}=1$，$EY=\lambda$，

故$Cov(X,Z)=\lambda$.

（2）由题意知$Z=XY$的取值范围是整数，

$P\{Z=k\}=P\{XY=k\}=P\{X=1,XY=k\}+P\{X=-1,XY=k\}$

$=P\{X=1,Y=k\}+P\{X=-1,Y=-k\}$

$=P\{X=1\}P\{Y=k\}+P\{X=-1\}P\{Y=-k\}$

$=\frac{1}{2}P\{Y=k\}+\frac{1}{2}P\{Y=-k\}$，

因为Y服从参数为λ的泊松分布，所以

当$k=0$时，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}$，

当$k>0$时，$P\{Z=k\}=\frac{\lambda^k}{2\cdot k!}e^{-\lambda}$，

当$k<0$时，$P\{Z=k\}=\frac{\lambda^{-k}}{2\cdot(-k)!}e^{-\lambda}$，

故Z的分布律为$P\{Z=k\}=\begin{cases} e^{-\lambda},k=0 \\ \frac{\lambda^k}{2\cdot k!}e^{-\lambda},k>0 \\ \frac{\lambda^{-k}}{2\cdot(-k)!}e^{-\lambda},k<0 \end{cases}$

（23）（本题满分 11 分）设总体X的概率密度为$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$，其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本，记$\sigma$的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$；

（1）求$\hat{\sigma}$；

（2）求$E\hat{\sigma}$和$D\hat{\sigma}$.

解析：（1）似然函数：$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}=2^{-n}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$，

取对数，$\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，

求导数有，$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，

令 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=0$ 可得：$\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，故 σ 的最大似然估计量为：$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

（2）$E\hat{\sigma}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right)=E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=$

$$\underline{\underline{x=\sigma t}}\int_{0}^{+\infty}te^{-t}\sigma dt=\sigma\Gamma(2)=\sigma.$$

$D\hat{\sigma}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right)=\frac{1}{n}D|X|=\frac{1}{n}\left[E\left(|X|^2\right)-\left(E|X|\right)^2\right]$，而

$$E\left(|X|^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx\,\underline{\underline{x=\sigma t}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sigma^2t^2}{\sigma}e^{-t}\sigma dt$$
$$=\sigma^2\int_{0}^{+\infty}t^2e^{-t}dt=\sigma^2\Gamma(3)=2\sigma^2,$$

于是，$D\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\left[E\left(|X|^2\right)-\left(E|X|\right)^2\right]=\frac{2\sigma^2-\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$.