2018 考研数学（二）真题及答案解析（文都版）

来源：文都教育

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.若 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则

A. $a=\dfrac{1}{2},b=-1.$

B. $a=-\dfrac{1}{2},b=-1.$

C. $a=\dfrac{1}{2},b=1.$

D. $a=-\dfrac{1}{2},b=1.$

答案：（B）

解析：$\because 1=\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1\right)\right]^{\frac{1}{\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1}{x^2}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)+ax^2+bx-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+b)x+(\frac{1}{2}+a)x^2+\frac{1}{6}x^3}{x^2}}$$

$$\therefore\begin{cases}1+b=0,\\ \dfrac{1}{2}+a=0,\end{cases}\quad\therefore b=-1,a=-\frac{1}{2}.$$

2.下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin|x|.$

B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}.$

C. $f(x)=\cos|x|.$

D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}.$

答案：（D）

解析：方法一：

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\sin|x|=0$，可导

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\sin\sqrt{|x|}=0$，可导

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x}=0$，可导

（D）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$不存在，不可导

应选(D).

方法二：

因为 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}, f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$$ 不存在

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，选（D）

对 (A): $f(x)=x\sin x$ 在 $x=0$ 处可导

对 (B): $f(x)\sim|x|\cdot\sqrt{|x|}=|x|^{\frac{3}{2}}$ 在 $x=0$ 处可导

对 (C): $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处可导.

3.设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geq 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leq -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geq 0.\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则

A. $a=3,\ b=1.$　　　　B. $a=3,\ b=2.$

C. $a=-3,\ b=1.$　　　　D. $a=-3,\ b=2.$

答案：（D）

解析：$\because f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leq -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geq 0.\end{cases}$

$$\therefore f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax, & x\leq -1,\\ x-1, & -1<x<0,\\ x-b+1, & x\geq 0.\end{cases}$$

因为 $f(x)+\mathrm{g}(x)$ 在 R 上连续，故 $f(x)+g(x)$ 在 $x=-1, x=0$ 处连续

$f(-1-0)=1+a$，$f(-1+0)=-2$，

$f(0-0)=-1$，$f(0+0)=1-b$，

$a=-3, b=2$，选择 D

4.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则

A.当 $f'(x)<0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0.$　　B.当 $f''(x)<0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0.$

C.当 $f'(x)>0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0.$　　D.当 $f''(x)>0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0.$

答案：（D）

解析：（方法一）取 $f(x)=2x-1$，和 $f(x)=-2x+1$，可排除（A）(C).

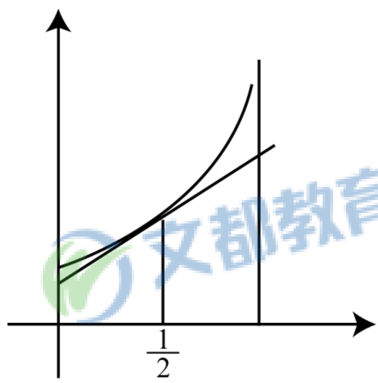
取 $f(x)=a(x-\frac{1}{2})^2+b$，由 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 得 $b=-\frac{a}{12}$，当 $f''(x)=2a<0$ 时，$f(\frac{1}{2})=b=-\frac{a}{12}>0$，排除(B),故选（D）

（方法二）由 Taylor 公式有： $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{1}{2})^2$

当 $f''(x)>0$ 时， $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$,$\xi$ 在 0 和 $x\in$ 间.

于是 $0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>\int_0^1\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]dx$

$=f\left(\frac{1}{2}\right)+0=f\left(\frac{1}{2}\right)$，应选（D）



(方法三) $f''(x)>0\Rightarrow f(x)$凹$\Rightarrow$

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

5.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$, 则

A. $M>N>K.$　　B. $M>K>N.$

C. $K>M>N.$　　D. $K>N>M.$

答案：（C）

解析：$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x$，

$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，因为 $\mathrm{e}^x>x+1$，所以 $\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}<1$

$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$，$1+\sqrt{\cos x}>1$

即 $\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}<1<1+\sqrt{\cos x}$

所以由定积分的比较性质 $K>M>N$，应选（C）.

6. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=$

A. $\frac{5}{3}$.　　B. $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{7}{3}$.　　D. $\frac{7}{6}$.

答案：（C）

解析：积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 0,-x\le y\le 2-x^2\right\}\cup\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,x\le y\le 2-x^2\right\}$

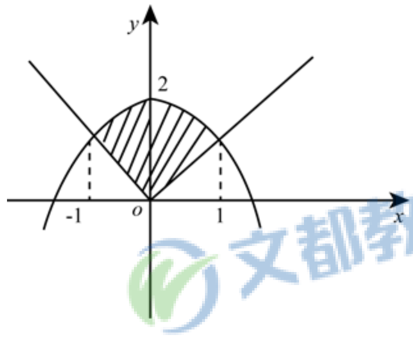
如图所示

因为 xy 关于 x 为奇函数，1 关于 x 为偶函数

所以 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y$

$=2\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}1\mathrm{d}y=2\int_{0}^{1}\left(2-x^2-x\right)\mathrm{d}x$

$=2\left(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{7}{3}$，应选（C）.



7. 下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

答案：（A）

解析：令 $P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\because P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 选项为 A

8.设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，(X,Y) 表示分块矩阵，则

A. $r(A\ AB)=r(A)$.　　B. $r(A\ BA)=r(A)$.

C. $r(A\ B)=\max\{r(A),r(B)\}$.　　D. $r(A\ B)=r(A^T\ B^T)$.

答案：（A）

解析：易知选项 C 错

对于选项 B 举反例：取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$

$$则BA=\begin{pmatrix}0&0\\3&3\end{pmatrix},(A,BA)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&3&3\end{pmatrix}$$

$$r(A,BA)\neq r(A)$$

对于选项 D，举反例：

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},则\ r(A,B)=2\neq r(A^T,B^T)$$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]$=________.

答案：1

解析：$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\arctan(x+1)-\arctan x\right]$

由拉格朗日中值定理可得：

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2}=1.其中x<\xi<x+1$$

10.曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________.

答案：$y=4x-3$

解析：$y=x^2+2\ln x$，$y'=2x+\dfrac{2}{x}$

由$y''=2-\dfrac{2}{x^2}=0$.可得$x=1,x=-1$(舍去)

当$x=1$时，$y'=4$，则切线方程为$y=4x-3$.

11.$\int_5^{+\infty}\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx=$________.

答案：$\dfrac{1}{2}\ln 2$

解析：$\int_5^{+\infty}\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx=\dfrac{1}{2}\int_5^{+\infty}(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1})dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)\Big|_5^{+\infty}=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

12.曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$对应点处的曲率为________.

答案：$\dfrac{2}{3}$

解析：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$$

当$t=\dfrac{\pi}{4}$时,$\dfrac{dy}{dx}=-1,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$$k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}$$

13.设函数$z=z(x,y)$由方程$\ln z+e^{z-1}=xy$确定，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,\frac{1}{2})}=$________.

答案：$\dfrac{1}{4}$

解析：$\ln z+e^{z-1}=xy$

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+e^{z-1}\frac{\partial z}{\partial x}=y$$.

由$x=2,y=\dfrac{1}{2}$代入$\ln z+e^{z-1}=1$,可得$z=1$

$x=2,y=\dfrac{1}{2},z=1$代入$\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+e^{z-1}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y$

可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{4}$

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组．若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为________.

答案：2

解析：$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

$\therefore P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆 $\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}=B$

$$\because |\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&1\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[(\lambda-1)^2+2\right]=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+3)=0$$

$\therefore B$的实特征值为2

$\therefore A$的实特征值为2.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或写出步骤.

15.（本题满分 10 分）

求不定积分$\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x.$

解析：$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+e^x-1}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{x}}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{x}-1+1}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\right)d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$$

16.（本题满分 10 分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=ax^2$.

（1）求 $f(x)$；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1，求 a 的值

解析：(1) $\int_0^x tf(x-t)dt\underline{\underline{x-t=u}}\int_x^0 (x-u)f(u)(-du)$

$$=\int_0^x xf(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

$$\therefore\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$$

求导得

$$f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax$$

$$\Rightarrow f'(x)+f(x)=2a$$

令$y=f(x)$.则$y'+y=2a.$

解之得$:y=f(x)=Ce^{-x}+2a$

显然$f(0)=0\therefore C=-2a.\Rightarrow f(x)=2a(1-e^{-x})$

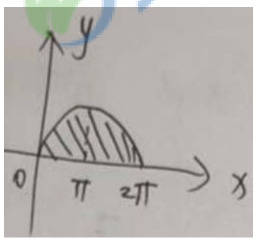
$(2)\because \dfrac{\int_0^1 f(x)dx}{1-0}=1$

$\therefore \int_0^1 2a(1-e^{-x})dx = 2a(1+e^{-1}-1)=1$

$\Rightarrow a=\dfrac{e}{2}$

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint_D (x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



解析：（利用形心坐标）$\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \Rightarrow \iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{x}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

而 $\bar{x}=\pi$，于是

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\mathrm{d}(t-\sin t)$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=\pi\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\left[2\pi-2\sin t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\pi\left[2\pi+0+\frac{t+\frac{1}{2}\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right]=3\pi^2$$

$$\iint_D 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}2y\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}y^2\Big|_0^{y(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi}y^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2.d(t-\sin t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t+\cos^3 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=[t-3\sin t]_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)\mathrm{d}\sin t$$

$$=2\pi+3\pi+0=5\pi.$$

于是：$\iint_D (x+2y)\mathrm{d}r\mathrm{d}y=3\pi^2+5\pi.$

18.（本题满分 10 分）

已知常数 $k\ge \ln 2-1$.证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$.

证明：$k \ge \ln 2 - 1$

（i）当$0 < x \le 1$时，只需证明：

$$x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1 \le 0.$$

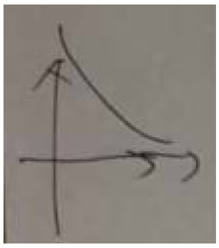
令$F(x) = x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1,\ (1 \ge x > 0),\ F(1) = 0.$

$$F'(x) = 1 - \frac{2\ln x}{x} + \frac{2k}{x} = \frac{2k + x - 2\ln x}{x}$$

令$G(x) = 2k + x - 2\ln x(0 < x \le 1)$. $G'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x} < 0$

故$G(x)$单调递减$\Rightarrow G(x) \ge G(1) = 2k + 1 \ge 2(\ln 2 - 1) + 1 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 > 0.$

故$F'(x) > 0 \Rightarrow F(x)$单增，从而$F(x) \le F(1) = 0$.



(ii)当$x \ge 1$时，只需证明：$x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1 \ge 0$即可

$F(x) = x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1$. $F'(x) = \frac{2k + x - 2\ln x}{x}$,

$G(x) = 2k + x - 2\ln x(x \ge 1)$， $G'(x) = \frac{x-2}{x}(x \ge 1)$

令$G'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$，令$G'(x) > 0 \Rightarrow x > 2$

令$G'(x) < 0 \Rightarrow 1 \le x < 2.$

故$G(x)$在$x = 2$处取唯一极小值，即为最小值，

$G(2) = 2k + 2 - 2\ln 2 = 2k + 2(1 - \ln 2) \ge 0$.

故$F'(x) \ge 0$,所以$F(x)$在$(1, +\infty)$上单调增加，从而$F(x) \ge F(1) = 0$. 证毕.

19.（本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形．三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

解析：设圆的周长为x，正方形的周长为y，正三角形的周长为z，则$x + y + z = 2$为限制条件.

目标函数为$S = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{z^2}{3^2} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{12\sqrt{3}}$

方法 1：拉格朗日乘数法

$$L = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{12\sqrt{3}} + \lambda(x + y + z - 2)$$

由$\begin{cases} L_x' = \dfrac{x}{2\pi} + \lambda = 0 \\ L_y' = \dfrac{y}{8} + \lambda = 0 \\ L_z' = \dfrac{z}{6\sqrt{3}} + \lambda = 0 \\ L_\lambda' = x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{A} \times 2 \\ y = \dfrac{8}{A} \times 2 \\ z = \dfrac{6\sqrt{3}}{A} \times 2 \end{cases}$ 这里 $A = 2\pi + 8 + 6\sqrt{3}$

由实际问题的背景可知：$S_{\min} = \dfrac{4\pi}{A^2} + \dfrac{16}{A^2} + \dfrac{12\sqrt{3}}{A^2} = \dfrac{4\pi + 16 + 12\sqrt{3}}{A^2}$

$$= \frac{4\pi + 16 + 12\sqrt{3}}{(2\pi + 8 + 6\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

方法 2：记 $x_1 = \dfrac{x}{\sqrt{4\pi}}$，$y_1 = \dfrac{y}{\sqrt{16}}$，$z_1 = \dfrac{z}{\sqrt{12\sqrt{3}}}$

则条件变为 $\sqrt{4\pi}x_1 + \sqrt{16}y_1 + \sqrt{12\sqrt{3}}z_1 = 2$

目标函数变为：$S = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

由 Cauchy 不等式得 $2^2 = \left(\sqrt{4\pi}x_1 + \sqrt{16}y_1 + \sqrt{12\sqrt{3}}z_1\right)^2$

$= \left[\left(\sqrt{4\pi}, \sqrt{16}, \sqrt{12\sqrt{3}}\right) \cdot (x_1, y_1, z_1)\right]^2$

$\le \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) \cdot \left(4\pi + 16 + 12\sqrt{3}\right)$

所以 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \ge \dfrac{4}{4\pi + 16 + 12\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$

$\therefore S_{\min} = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$

方法 3：$z = 2 - x - y$

$S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{(2 - x - y)^2}{12\sqrt{3}}$ *

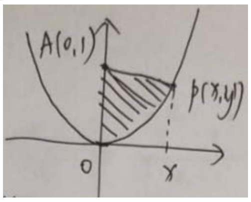
由 $\begin{cases} S'_x = \dfrac{2x}{4\pi} - \dfrac{2\cdot(2-x-y)}{12\sqrt{3}} = 0 \\ S'_y = \dfrac{2y}{16} - \dfrac{2\cdot(2-x-y)}{12\sqrt{3}} = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$ 代入＊得

$$S_{\min} = \frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$$

20.（本题满分 11 分）

已知曲线 $L: y = \dfrac{4}{9}x^2 (x \geq 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$. 设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积. 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率.

解析：由题意 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=3} = 4,$



$$S = \frac{1}{2}(1+y)x - \int_0^x y(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}(1+\frac{4}{9}x^2)x - \int_0^x \frac{4}{9}t^2 dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{2}{9}x^3 - \frac{4}{27}x^3 = \frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{2}x$$

于是 $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{ds}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{dx}{dt}$

从而 $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{x=3} = \left(\dfrac{2}{9}\times 3^2 + \dfrac{1}{2}\right)\cdot 4 = 10.$

21.（本题满分 11 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明：①先证 $x_n > 0,$ 易证

②再证 $\{x_n\}$ 单减，由 $e^{x_{n+1}} = \dfrac{e^{x_n}-1}{x_n} = \dfrac{e^{x_n}-e^0}{x_n - 0}$ $\underline{\underline{\text{拉格朗日中值定理}}}$ e^{ξ}，$\xi \in (0, x_n)$

$\therefore x_{n+1} = \xi < x_n$

$\therefore \{x_n\}$ 单减有下界，由此得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在

③设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A,$ 则 $Ae^A = e^A - 1$

$\Rightarrow A=0$

22.（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解析：（1） $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 而 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$,

由 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$ 得

当 $a\neq 2$ 时，$r(A)=3$，只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$.

当 $a=2$ 时，$r(A)=2$，方程有无穷多解，

通解为 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

（2）由（1）知，当 $a\neq 2$ 时 A 可逆，

令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_1+ax_3 \end{cases}$ ，即 $Y=AX$ ，

则规范形为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$,

当 $a=2$ 时，$r(A)=2$，

令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ ，则

$f=y_1^2+y_2^2+(y_1+y_2)^2=2(y_1+\frac{1}{2}y_2)^2+\frac{3}{2}y_2^2$,

令 $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(y_1 + \frac{1}{2}y_2\right) \\ z_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ ，则得规范形为 $f = z_1^2 + z_2^2$.

23.（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求 a；

（2）求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解析：（1）∵A 经过初得列变换化为 B

$\therefore r(A) = r(B)$

$$\because A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 3 & -3a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore r(A) = 2 \quad \therefore r(B) = 2$.

$$由 B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

得 $a = 2$.

（2）令 $P_1 = (X_1, X_2, X_3)$，$B = (b_1, b_2, b_3)$

$AP_1 = A(X_1, X_2, X_3) = (AX_1, AX_2, AX_3) = (b_1, b_2, b_3)$

$\therefore AX_i = b_i,\ i = 1,2,3$

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\1&3&0&\vdots&0&1&1\\2&7&-2&\vdots&-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&3&-6&\vdots&-3&-3&-3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&0&0&\vdots&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&6&\vdots&3&4&4\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&0&0&\vdots&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore AX_1=b_1$ 的通解为 $X_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$，（$k_1$ 为任意常数）

$AX_2=b_2$ 的通解为 $X_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{pmatrix}$，（$k_2$ 为任意常数）

$AX_3=b_3$ 的通解为 $X_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{pmatrix}$，（$k_3$ 为任意常数）

$\therefore P_1=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$（其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数）

$\because |P_1|=\begin{vmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{vmatrix}=k_3-k_2$

当 $k_2\neq k_3$ 时，P_1 可逆,取可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$（$k_1$ 为任意常数，$k_2\neq k_3$），使得 $AP=B$.