2018 考研数学真题答案解析之条件极值

来源：文都教育

2018 考研数学终于落下了帷幕，许多同学们在走出考场的第一时间联系老师，诉说今年数学考试的种种艰辛。总的来说，今年考研数学真题中的求条件极值的题在数学（一）、数学（二）及数学（三）都有考到，而且考到的是同一个题目，数学（一）在解答题的第 16 题出现，数学（二）是解答题的第 19 题，数学（三）中是解答题的第 17 题。

今年的求条件极值的考研题目要比往年的求条件极值的题要难一些，计算量也要大一些。为让同学们对自己的成绩有一个预估，文都教育数学老师接下来就给大家分析一下 2018 考研数学真题中求条件极值的题目。

16.（本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

解：设围成圆、正方形、正三角形的铁丝长度分别为x,y,z，显然

$x+y+z=2$ 为限制条件，

目标函数为 $S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{z^2}{3^2}$

$$=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{12\sqrt{3}}$$

方法 1：拉格朗日乘数法

构造拉格朗日函数：$L=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{12\sqrt{3}}+\lambda(x+y+z-2)$

由 $\begin{cases} L_x = \dfrac{x}{2\pi} + \lambda = 0 \\ L_y = \dfrac{y}{8} + \lambda = 0 \\ L_z = \dfrac{z}{6\sqrt{3}} + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{A} \times 2 \\ y = \dfrac{8}{A} \times 2 \\ z = \dfrac{6\sqrt{3}}{A} \times 2 \end{cases}$ 这里 $A = 2\pi + 8 + 6\sqrt{3}$

由实际问题的背景可知：$S_{\min} = \dfrac{4\pi}{A^2} + \dfrac{16}{A^2} + \dfrac{12\sqrt{3}}{A^2} = \dfrac{4\pi + 16 + 12\sqrt{3}}{A^2}$

$$= \frac{4\pi + 16 + 12\sqrt{3}}{(2\pi + 8 + 6\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

方法 2：记 $x_1 = \dfrac{x}{\sqrt{4\pi}}$，$y_1 = \dfrac{y}{\sqrt{16}}$，$z_1 = \dfrac{z}{\sqrt{12\sqrt{3}}}$

则条件变为 $\sqrt{4\pi}x_1 + \sqrt{16}y_1 + \sqrt{12\sqrt{3}}z_1 = 2$

目标函数变为：$S = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

由 Cauchy 不等式得 $2^2 = \left(\sqrt{4\pi}x_1 + \sqrt{16}y_1 + \sqrt{12\sqrt{3}}z_1\right)^2$

$$= \left(\left(\sqrt{4\pi}, \sqrt{16}, \sqrt{12\sqrt{3}}\right) \cdot (x_1, y_1, z_1)\right)^2$$

$$\le \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) \cdot \left(4\pi + 16 + 12\sqrt{3}\right)$$

所以 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \ge \dfrac{4}{4\pi + 16 + 12\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$

$$\therefore S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

方法 3：$z = 2 - x - y$

$$S = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{(2 - x - y)^2}{12\sqrt{3}} \qquad (*)$$

由 $\begin{cases} S_x = \dfrac{2x}{4\pi} - \dfrac{2\cdot(2-x-y)}{12\sqrt{3}} = 0 \\ S_y = \dfrac{2y}{16} - \dfrac{2\cdot(2-x-y)}{12\sqrt{3}} = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$ 代入 $(*)$ 得

$$S_{\min} = \frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$$

以上就是文都教育数学老师给大家带来的2018考研数学真题中求条件极值的三种求解方法，希望能够对各位同学们有所帮助。最后，文都教育祝大家都能取得好成绩。