2018 考研数学（二）真题（完整版）

来源：文都教育

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则

A. $a=\frac{1}{2}, b=-1.$

B. $a=-\frac{1}{2}, b=-1.$

C. $a=\frac{1}{2}, b=1.$

D. $a=-\frac{1}{2}, b=1.$

2.下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin|x|.$

B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}.$

C. $f(x)=\cos|x|.$

D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}.$

3.设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geq 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leq -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geq 0.\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则

A. $a=3,\ b=1.$

B. $a=3,\ b=2.$

C. $a=-3,\ b=1.$

D. $a=-3,\ b=2.$

4.设函数 $f(x)$ 在[0，1]上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则

A.当 $f'(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0.$

B.当 $f''(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0.$

C.当 $f'(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0.$

D.当 $f''(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0.$

5.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$, 则

A. $M>N>K.$

B. $M>K>N.$

C. $K>M>N.$

D. $K>N>M.$

6. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=$

A. $\frac{5}{3}$.　　B. $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{7}{3}$.　　D. $\frac{7}{6}$.

7.下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

8.设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $r(\boldsymbol{X})$为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩，（$\boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y}$）表示分块矩阵，则

A. $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

B. $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

C. $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

D. $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.

10.曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________.

11. $\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$________.

12.曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为________.

13.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$________.

14.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组.若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，

$\boldsymbol{A\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或深处步骤.

15.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$.

16.（本题满分 10 分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=ax^2$.

（1）求 $f(x)$；

（2）若 $f(x)$ 在区间[0，1]上的平均值为 1，求 a 的值.

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$（$0\le t\le 2\pi$）与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

18.（本题满分 10 分）

已知常数 $k\ge \ln 2-1$.证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$.

19.（本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

20.（本题满分 11 分）

已知曲线 $L:y=\dfrac{4}{9}x^2(x\ge 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$.设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积.若 P 运动到点(3，4)时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率.

21.（本题满分 11 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n} x_n$.

22.（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

23.（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（1）求 a;

（2）求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.