2019 考研数学一考试真题答案解析（完整版）

来源：文都教育

1.$\because x-\tan x\sim-\dfrac{x^3}{3}$ 若要 $x-\tan x$ 与 x^b 同阶无穷小，$\therefore k=3$

$\therefore$ 选 C

2. ① $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x|x|-0}{x}=0$ $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ 不存在

$\therefore x=0$ 处 $f(x)$ 不可导

②当 $x<0$ 时 $f(x)=-x^2$ $\because f'(x)=-2x>0$ $\therefore f(x)$ 单增

当 $x>0$ 时 $f(x)=x\ln x$ $\because f'(x)=\ln x+1$ $x\in(0,\mathrm{e}^{-1})$ 时 $f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 单减 $\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点

$\therefore$ 选 B.

3.（D）

$\because$ $\{a_n\}$单调增加有界

$\therefore$ 由单调有界收敛定理可得

$\{u_n\}$极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$ 的前 n 项和为

$$S_n=u_2^2-u_1^2+\cdots+u_{u+1}^2-u_n^2$$
$$=u_{n+1}^2-u_1^2$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}^2-u_1^2=A-u_1^2$.选（D）

4.由题意知，积分与路径无关

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

存在 $u(x,y)$使得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$\because$ $Q=\dfrac{x}{y^2}$

$\therefore$ $u(x,y)=-\dfrac{x}{y}+c(x)$

则 $P=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{y}+c'(x)$

又$\because$ x 可为 0

$\therefore$ 排除 e，选（D）

5.选（C）

解：由 $A^2+A=2E$ 得 $\lambda^2+\lambda=2$，λ 为 A 的特征值，
$\boldsymbol{\lambda}$=-2 或 1，

又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，故 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，

规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$，选（C）

6.选（A）

解：由条件知 3 张平面无公共交点，方程组无解，

故 $r(A)\neq r(\overline{A})$.

又两平面交于一条直线，故 $r(A)=2$，

因此 $r(A)=2, r(\overline{A})=3,$ 选（A）.

7.选（C）

解： $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

$\because P(A)=P(B)\quad \therefore P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 选（C）

8.解：因为 $X\sim N(u,\boldsymbol{\sigma}^2)$ $Y\sim N(u,\boldsymbol{\sigma}^2)$ X 与 Y 相互独立

$\therefore X-Y\sim N(0,2\boldsymbol{\sigma}^2)$

$\therefore P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\boldsymbol{\sigma}}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\boldsymbol{\sigma}}\right\}=2\Phi\left|\frac{1}{\sqrt{2}\boldsymbol{\sigma}}\right|-1$

$\therefore$ 与 u 无关，即与 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 有关　选择（A）

9.解析：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)(\cos y)+x$$

所以

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)\cdot\frac{1}{\cos x}+y\cdot\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\cos y f'(\sin y-\sin x)+\frac{x}{\cos y}$$
$$=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$$

10.解析：

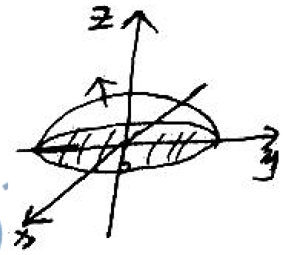
$$2yy'-y^2-2=0$$
$$y'=\frac{y^2+2}{2y}$$
$$\frac{2y}{y^2+2}dy=dx$$

两边积分得 $\ln(y^2+2)=x+\ln C$

$y^2+2=Ce^x$

由 $y(0)=1$ 得 $C=3$

所以 $y=\sqrt{3e^x-2}$



11.解析：$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x}^{2n})=\cos\sqrt{x}$

12.解析：$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{3}$$

13.解：$\because$ α_1,α_2 线性无关.　　$\therefore$ $r(A)\ge 2$

$\because$ $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_3$　　$\therefore$ $r(A)<3$　　$\therefore$ $r(A)=2$

$\therefore$ $Ax=0$ 为基础解系有 $n-r(A)=3-2=1$

$\because$ $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$

$$\therefore\ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\ \text{通解为}\ k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\quad k\in R.$$

14. X 的 $p.d.f$ 为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & else\end{cases}$

$$EX=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$P\{F(x)\ge Ex-1\}=P\{F(x)\ge\frac{1}{3}\}=P\{x\ge 2\}\ne P\{\frac{2}{\sqrt{3}}<x<2\}$$

$$=P\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}<x<2\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}=\frac{1}{4}(4-\frac{4}{3})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

15.解： $P(x)=x \qquad Q(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\because\ y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x+c)$$

$\because\ y(0)=0 \qquad \therefore\ c=0$

$\therefore\ y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

$\therefore$

$$y'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y''(x)=-2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=(x^3-3x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

令 $y''(x)=0$

$\therefore\ x_1=0 \qquad x_2=\sqrt{3} \qquad x_3=-\sqrt{3}$

当 $-\sqrt{3}<x<0$ 或 $x>\sqrt{3}$ 时，$y''(x)>0$

∴$y(x)$的凹区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$

当 $x<-\sqrt{3}$ 或 $0<x<\sqrt{3}$ 时，$y''(x)<0$.

$\therefore y(x)$的凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$和$(0,\sqrt{3})$

所以曲线 $y(x)$的拐点为（0，0），$(\sqrt{3},\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$

16.解：（1）在点（3，4）处的梯度方向为

$$\operatorname{grad} z|_{(3,4)}=(z_x'(3,4),z_y'(3,4))=(6a,8b)$$

且$|\operatorname{grad} z|_{(3,4)}|=10$,

由题意知 $\begin{cases}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{6a}{10}\\-\dfrac{4}{5}=\dfrac{8b}{10}\end{cases}$, 故$\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$.

（2）由（1）知 $z=2-x^2-y^2$,

由 $z\geq 0$ 得 $x^2+y^2\leq 2$，

令 $D=\{x,y\,|\,x^2+y^2\leq 2\}$，

曲面面积为

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}a\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\times\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{13\pi}{3}$$

17.解析：（1）$y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

通解 $y=e^{xdx}\left|\int\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{(-x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right|$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left|\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C\right|$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left|\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C\right|$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{x}+C\right)$$

由 $f(1)=\sqrt{\mathrm{e}}=(C+1)\sqrt{\mathrm{e}}$ 得 $C=0$

文都教育

所以 $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

（2）

$$V_x=\pi\int_1^2\left|\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right|^2 dx$$

$$=\pi\int_1^2 x\cdot e^{x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^2 e^{x^2}dx^2=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}\left(e^4\text{-}e\right)$$

18.设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

解析（1） $a_n-a_{n-1}=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$. 则 $\{a_n\}$ 单调递减.

$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\underline{\underline{x-\sin t}}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot\cos^2 tdt=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot(1-\sin^2 t)dt=I_n-I_{n+2}=\dfrac{1}{n+2}I_n$, 则

$a_{n-2}=\dfrac{1}{n}I_{n-2}$, 则 $a_n=a\dfrac{n-1}{n(n+2)}I_{n-2}=\dfrac{n-1}{(n+2)}a_{n-2}$.

（2）由（1）知，$\{a_n\}$ 单调递减，则 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$, 即 $\dfrac{n-1}{n+2}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$.

由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

19.设 Ω 是由锥面 $x^2+\left(y-z^2\right)=(1-z)^2(0\quad z\quad 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

解：令 $D_z=\left\{(x,y)\middle|x^2+\left(y-z^2\right)\le(1-z)^2\right\}$，形心为 $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$,

由于 Ω 关于 yOz 面对称.

故 $\bar{x}=0$

文都教育

$$\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-z}(z+r\sin\theta)r\mathrm{d}r}{\int_0^1\pi(1-z)^2\mathrm{d}z}$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}z(1-z)^2+\frac{1}{3}(1-z)^3\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^1\pi(1-z)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}$$

,

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\pi}{3}\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{\pi}\int_0^1 z\cdot\pi(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}$$

故 Ω 的形心坐标为 $\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

20.（1）由题意可知，$\beta=b\alpha_1+c\alpha_2+\alpha_3$

即 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=b\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+c+1\\2b+3c+a\\b+2c+3\end{pmatrix}$

$\begin{cases}b+c=0\\2b+3c+a=1\\b+2c=-2\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&1\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\2&3&1&1\\1&2&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&1&1\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

$\therefore b=2,c=-2,a=3$

(2) $|\alpha_2,\alpha_3,\beta|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=2\neq0\therefore\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性无关.

且向数量个数为 3 个 $\therefore\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 是 R^3 的一个基.

$$(\alpha_2,\alpha_3,\beta)=(\alpha_2,\alpha_3,2\alpha_1,-2\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$(P\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&2&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right)$$

$$\therefore P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore(\alpha_2,\alpha_3,\beta)\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

即$(\alpha_2,\alpha_3,\beta)$到$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$

21. $A=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$相似

（1）

∵

$\therefore A \sim B$

$\therefore tr(A) = tr(B) \Rightarrow \begin{cases} x-4=1+y \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=-2 \end{matrix}$

$$(2)\left|\lambda E - B\right| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(x-2) = 0$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$

$$\lambda = -1\text{时}, A+E = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_1 = (-2, 1, 0)^T$$

$$\lambda = -2\text{时}, A+2E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = (-1, 2, 4)^T$$

$$\lambda = 2\text{时}, A-2E = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_3 = (-1, 2, 0)^T$$

$$P_1 = (\xi_1, \xi, \xi_3) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

文都教育

$\lambda = -1$时，$B+E=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\qquad x_1=(-1,3,0)^T$

$\lambda_2=-2$时，$B+2E=\begin{bmatrix}4&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\qquad x_2=(0,0,1)^T$

$\lambda 3=2$时，$B-2E=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\qquad x_3=(1,0,0)^T$

$P_2=(x_1x_2x_3) \qquad P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&2\end{bmatrix}$

$B=P_2\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&2\end{bmatrix}P_2^{-1}$

$B=P_2P_1^{-1}(A_2)P_1P_2-1$

故$P=P_1P_2^{-1}$

$=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\1&2&2\\0&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&0\\0&0&1\\1&3&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{bmatrix}$

22. （1）随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}\\&=P\{X\le z,Y=1\}+P\{X\ge -z,Y=-1\}\\&=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z))\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=p(1-F_X(-z))=pe^z$

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z))=(1-p)(1-e^{-z})+p$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}(1-p)e^{-z}, & z>0\\ pe^z, & z\le 0\end{cases}$

（2）$EX=1, EZ=E(XY)=EX\cdot EY=1-2p$

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=\left(DX+(EX)^2\right)(1-2p)=2(1-2p)$

当 $E(XZ)=E(X^2)E(Z)$ 时，X,Z 不相关. 即 $1-2p=2(1-2p)$，可得 $p=\frac{1}{2}$.

（3）因为 $P\{X\le 1,Z\le -1\}=P\{X\le 1,Y=-1,X\ge 1\}=0$

又 $P\{X\le 1\}=1-e^{-1}$，$P\{Z\le -1\}=pe^{-1}$

则 $P\{X\le 1,Z\le -1\}\ne P\{X\le 1\}\cdot P\{Z\le -1\}$，故不独立.

23. （1）由 $\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=A\sqrt{2}\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}=\frac{A\sqrt{2\pi}}{2}=1$ 可得：$A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值，似然函数为

$$L(\sigma^2)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma^n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu\\ 0, & else\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$ 时，

$$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}(\ln 2-\ln\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $\frac{d(\ln L(\sigma^2))}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$，可得 $\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\mu)^2}{n}$

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_1-\mu)^2}{n}$.