2019 考研数学一考试真题及答案详解

来源：文都教育

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$

A.1.
B.2.
C.3.
D.4.

解析：

$\because x - \tan x \sim -\dfrac{x^3}{3}$，若要 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，$\therefore k = 3$

$\therefore$ 选 C

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \le 0, \\ x\ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 x=0 是 f（x）的

A.可导点，极值点.
B.不可导点，极值点.
C.可导点，非极值点.
D.不可导点，非极值点.

解析：

① $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x|x| - 0}{x} = 0$，$f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$ 不存在

$\therefore x = 0$ 处 $f(x)$ 不可导

②当 $x < 0$ 时，$f(x) = -x^2 \because f'(x) = -2x > 0 \therefore f(x)$ 单增

当 $x > 0$ 时 $f(x) = x\ln x \because f'(x) = \ln x + 1$ $x \in (0, \mathrm{e}^{-1})$ 时 $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 单减 $\quad \therefore x = 0$ 为 $f(x)$ 的极值点.

$\therefore$ 选 B.

3.设｛u_n｝是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}})$.

D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

解析：

∵ $\{u_n\}$单调增加且有界

∴ 由单调有界收敛定理可得$\{u_n\}$极限存在，设$\lim_{n\to\infty}u_n=A$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$的前 n 项和为$S_n=u_2^2-u_1^2+\cdots+u_{n+1}^2-u_n^2=u_{n+1}^2-u_1^2$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}^2-u_1^2=A-u_1^2$.选（D）

4.设函数$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$.如果对上半平面（y>0）内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，那么函数 $P(x,y)$可取为

A. $y-\frac{x^2}{y^3}$.

B. $\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}$.

C. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$.

D. $x-\frac{1}{y}$.

解析：

由题意知，积分与路径无关，则$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

存在 $u(x,y)$使得$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

∵ $Q=\frac{x}{y^2}$ ∴ $u(x,y)=-\frac{x}{y}+c(x)$

则 $P=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{y}+c'(x)$

又∵ x 可为 0　∴ 排除（C），选（D）

5.设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵.若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

解析：

由 $A^2+A=2E$ 得 $\lambda^2+\lambda=2$，λ 为 A 的特征值，$\boldsymbol{\lambda}=-2$ 或 1，

又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，故 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，

规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$，选（C）

6.如图所示，有 3 张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\,(i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$，则

A. $r(A)=2,r(\overline{A})=3$.

B. $r(A)=2,r(\overline{A})=2$.

C. $r(A)=1,r(\overline{A})=2$.

D. $r(A)=1,r(\overline{A})=1$.

解析：

由条件知 3 张平面无公共交点，方程组无解，故 $r(A)\neq r(\overline{A})$.

又两平面交于一条直线，故 $r(A)=2$，

因此 $r(A)=2,r(\overline{A})=3$，选（A）.

7.设 A，B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.

D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

解析：

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$, $\quad P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

$\because P(A)=P(B)\quad \therefore P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 选（C）

8.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$

A.与 μ 无关，而与 σ^2 有关
B.与 μ 有关，而与 σ^2 无关
C.与 μ，σ^2 都有关
D.与 μ，σ^2 都无关

解析：

因为 $X\sim N(u,\sigma^2)$ $Y\sim N(u,\sigma^2)$ 且 X 与 Y 相互独立

$\therefore X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$

$\therefore P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left|\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right|-1$

$\therefore$ 与 μ 无关，而与 σ^2 有关　选择（A）

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9.设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{z}{x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{z}{y}=$.

解析：

因为：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)(\cos y)+x$

所以：

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)\cdot\frac{1}{\cos x}+y\cdot\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\cos yf'(\sin y-\sin x)+\frac{x}{\cos y}$$

$$=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$$

10.微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$.

.解析：$2yy'-y^2-2=0$

$$y'=\frac{y^2+2}{2y}$$

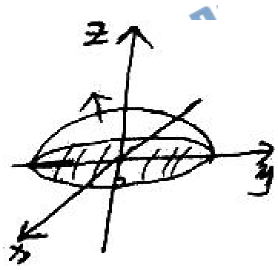
$$\frac{2y}{y^2+2}dy=dx$$

两边积分得 $\ln(y^2+2)=x+\ln C$

$y^2+2=Ce^x$

由 $y(0)=1$ 得 $C=3$

所以 $y=\sqrt{3e^x-2}$



11.幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$.

解析：

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x}^{2n})=\cos\sqrt{x}$$

12.设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,dxdy=$.

解析：

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,d\,x\,d\,y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\,d\,x\,d\,y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{y^2}\,d\,x\,d\,y=\iint_{x^2+y^2\le 4}|y|\,d\,x\,d\,y=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^2\sin\theta dr$$

$$=\frac{32}{3}$$

13.设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为 3 阶矩阵，若 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为.

解析：

$\because$ α_1,α_2 线性无关.　　$\therefore$ $r(A)\ge 2$

$\because$ $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_3$　　$\therefore$ $r(A)<3$　　$\therefore$ $r(A)=2$

$\therefore$ $Ax=0$ 为基础解系有 $n-r(A)=3-2=1$ 个线性无关的解向量

$\because$ $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$

$\therefore\ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$

$\therefore$ 通解为 $k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$k\in R$.

14.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $F(X)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$.

解析：

X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$EX=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$P\{F(x)\ge EX-1\}=P\{F(x)\ge\frac{1}{3}\}=P\{\frac{x^2}{4}\ge\frac{1}{3}\}=P\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}<x<2\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2=\frac{1}{4}(4-\frac{4}{3})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

解答题（高等部分）

15.设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

解析：

$P(x)=x\qquad Q(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

$\because\ y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right] = e^{-\int x dx}\left[\int e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\int x dx} dx + c\right]$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx + c\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}(x + c)$$

$\because\ y(0)=0 \quad \therefore\quad c=0$

$\therefore\ y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\therefore$

$$y'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y''(x) = -2x e^{-\frac{x^2}{2}} + (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = (x^3 - 3x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})e^{-\frac{x^2}{2}}$$

令 $y''(x) = 0$

$\therefore\ x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{3} \quad x_3 = -\sqrt{3}$

当 $-\sqrt{3} < x < 0$ 或 $x > \sqrt{3}$ 时，$y''(x) > 0$

$\therefore$$y(x)$的凹区间为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$

当　$x < -\sqrt{3}$ 或 $0 < x < \sqrt{3}$ 时，$y''(x) < 0$.

$\therefore$$y(x)$的凸区间为 $(-\infty, -\sqrt{3})$和$(0, \sqrt{3})$

所以曲线 $y(x)$的拐点为（0，0），$(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$

16.设 a，b 为实数，函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点（3，4）处的方向导数中，沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求 a，b

（2）求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \ge 0)$ 的面积.

解析：

（1）在点（3，4）处的梯度方向为 $\mathrm{grad}\, z|_{(3,4)} = (z'_x(3,4), z'_y(3,4)) = (6a, 8b)$

且 $|\mathrm{grad}\, z|_{(3,4)}| = 10$,

由题意知 $\begin{cases}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{6a}{10}\\ -\dfrac{4}{5}=\dfrac{8b}{10}\end{cases}$，故 $\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}$.

（2）由（1）知 $z=2-x^2-y^2$，

由 $z\ge 0$ 得 $x^2+y^2\le 2$，

令 $D=\{x,y\,|\,x^2+y^2\le 2\}$，

曲面面积为

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r=2\pi\times\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13\pi}{3}$$

17. 求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解析：

设在区间 $[k\pi,(k+1)\pi](k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 上所围的面积记为 u_k，则

$$u_k=\int_{k\pi}^{(k+1)x}\mathrm{e}^{-x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x=(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)x}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x;$$

记 $I=\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$，则

$$I=-\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\cos x=-(\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\cos x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-(\mathrm{e}^{-x}\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-I$$

所以 $I=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)+C$；

因此

$$u_k=(-1)^k\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-k}(\cos x+\sin x)\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}+\mathrm{e}^{-k\pi})$$；

(这里需要注意 $\cos k\pi=(-1)^k$)

因此

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-k\pi}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi}-\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}};$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\pi}-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$$

18.设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

解析：（1）$a_n-a_{n-1}=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$. 则 $\{a_n\}$ 单调递减.

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot\cos^2 tdt=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot(1-\sin^2 t)dt=I_n-I_{n+2}=\frac{1}{n+2}I_n,$$

则 $a_{n-2}=\frac{1}{n}I_{n-2}$, 则$a_n=\frac{n-1}{n(n+2)}I_{n-2}=\frac{n-1}{(n+2)}a_{n-2}$.

（2）由（1）知，$\{a_n\}$ 单调递减，则 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\frac{n-1}{n+2}a_{n-1}$, 即 $\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$.

由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

19.设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2-(1-z)^2(0\le z\le 1)$ 与平面 z=0 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标。

解：令 $D_z=\left\{(x,y)\middle|x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2\right\}$，形心为 $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\right)$，

由于 Ω 关于 yOz 面对称，故 $\bar{x}=0$

$$\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\int_0^{1-z}\left(z+r\sin\boldsymbol{\theta}\right)r\mathrm{d}r}{\int_0^1\boldsymbol{\pi}(1-z)^2\mathrm{d}z}$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}z(1-z)^2+\frac{1}{3}(1-z)^3\sin\boldsymbol{\theta}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^1\boldsymbol{\pi}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\pi}{3}\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{\pi}\int_0^1 z\cdot\boldsymbol{\pi}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}$$

故Ω的形心坐标为$\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

20.设向量组$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$　$\alpha_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$　$\alpha_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$为$R^3$的一个基，$\beta=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$在这个基下的坐标为$(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

（1）求a,b,c

（2）证明α_2,α_3,β为R^3的一个基.并求α_2,α_3,β到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵.

解析：

（1）由题意可知，$\boldsymbol{\beta}=b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

即 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=b\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+c+1\\2b+3c+a\\b+2c+3\end{pmatrix}$

$\begin{cases}b+c=0\\2b+3c+a=1\\b+2c=-2\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&1\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\2&3&1&1\\1&2&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&1&1\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

$\therefore b=2,c=-2,a=3$

(2) $|\alpha_2,\alpha_3,\beta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \therefore \alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性无关.

且向数量个数为 3 个 $\therefore \alpha_2,\alpha_3,\beta$ 是 R^3 的一个基.

$$(\alpha_2,\alpha_3,\beta) = (\alpha_2,\ \alpha_3, 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(P \vdots E) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\alpha_2,\alpha_3,\beta)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

即 $(\alpha_2,\alpha_3,\beta)$ 到 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 x、y

（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$

解析：

（1）

$\because A\sim B$

$\therefore tr(A)=tr(B),|A|=|B|\Rightarrow\begin{cases}x-4=1+y\\ y=-2x+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-2\end{cases}$

$(2)|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(x-2)=0$

$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=2$

$\lambda=-1$时, $A+E=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad\xi_1=(-2,1,0)^T$

$\lambda=-2$时, $A+2E=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4 & 10 & -4\\ 0 & -10 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad\xi_2=(-1,2,4)^T$

$\lambda=2$时, $A-2E=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad\xi_3=(-1,2,0)^T$

令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$ 有 $P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$

$$\lambda=-1\text{时},\ B+E=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \alpha_1=(-1,3,0)^T$$

$$\lambda=-2\text{时},\ B+2E=\begin{bmatrix}4&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad \alpha_2=(0,0,1)^T$$

$$\lambda=2\text{时},\ B-2E=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad \alpha_3=(1,0,0)^T$$

令 $P_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$　　　　有 $P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&2\end{bmatrix}$

$$B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1},\text{故}P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\1&2&2\\0&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\\1&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{bmatrix}$$

22. 设随机变量 X 与 Y 独立 .X 服从参数为 1 的指数分布 .Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$，令 $Z=XY$

（1）求 Z 的概率密度.

（2）p 为何值时，X 与 Y 不相关?

（3）X 与 Z 是否相互独立?

解析：

（1）随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}\\&=P\{X\le z,Y=1\}+P\{X\ge -z,Y=-1\}\\&=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z))\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=p\left(1-F_X(-z)\right)=pe^z$

当 $z\geq 0$ 时，$F_Z(z)=(1-p)F_X(z)+p\left(1-F_X(-z)\right)=(1-p)(1-e^{-z})+p$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}(1-p)e^{-z}, & z>0\\ pe^z, & z\leq 0\end{cases}$

（2）$EX=1, EZ=E(XY)=EX\cdot EY=1-2p$

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=\left(DX+(EX)^2\right)(1-2p)=2(1-2p)$

当 $E(XZ)=E(X)E(Z)$ 时，X,Z 不相关. 即 $1-2p=2(1-2p)$，可得 $p=\dfrac{1}{2}$.

（3）因为 $P\{X\leq 1, Z\leq -1\}=P\{X\leq 1, Y=-1, X\geq 1\}=0$

又 $P\{X\leq 1\}=1-e^{-1}$，$P\{Z\leq -1\}=pe^{-1}$

则 $P\{X\leq 1, Z\leq -1\}\neq P\{X\leq 1\}\cdot P\{Z\leq -1\}$，故不独立.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu.\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 A;

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

解析：

（1）由 $\int_{\mu}^{+\infty}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=A\sqrt{2}\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}=\dfrac{A\sqrt{2\pi}}{2}=1$ 可得：$A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值，似然函数为

$$L(\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^n}\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu\\ 0, & else\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$ 时，

$$\ln L\left(\sigma^2\right)=\frac{n}{2}(\ln 2-\ln \pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$$

令 $\frac{d\left(\ln L\left(\sigma^2\right)\right)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2=0$，可得 $\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_1-\mu\right)^2}{n}$

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_1-\mu\right)^2}{n}$.