2019 考研数学二考试真题及答案详解

来源：文都教育

一、选择题 1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.当 $x\to 0$ 时，$x-\tan x$ 与 x^k 同阶，求 k（　　）

A.1

B.2

C.3

D.4

解析：

$\because x-\tan x\sim -\frac{x^3}{3}$ 若要 $x-\tan x$ 与 x^b 同阶无穷小，$\therefore k=3$

$\therefore$ 选 C

2. $y=x\sin x+2\cos x\left[x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)\right]$ 的拐点坐标

A. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{2}\right)$

B. $\left(0,2\right)$

C. $\left(\pi,-2\right)$

D. $(\frac{3}{2}\pi,-\frac{3}{2}\pi)$

$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x, y''=-x\sin x,$ 令 $y''=0$ 得 $x=0,x=\pi,$ 又因为 $y'''=-\sin x-x\cos x,$ 将上述两点代入得 $y'''(\pi)\neq 0,$ 所以 $(\pi,-2)$ 是拐点.

选 C

3.下列反常积分发散的是

A. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

B. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

C. $\int_0^{+\infty}\frac{arc\tan x}{1+x^2}dx$

D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

解析：

$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \mathrm{d}x = P(2) = 1$

或 $-\int_0^{+\infty} x \mathrm{d} e^{-x} = -\left[x e^{-x} |_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x \right]$

$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = -e^{-x} |_0^{+\infty} = -[0-1] = 1$

选 A

4.已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$，则 a、b、c 依次为

A. 1，0，1
B. 1，0，2
C. 2，1，3
D. 2，1，4
解析：

由条件知特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，特征方程为 $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$，故 a=2，b=1，而 $y^*=e^x$ 为特解，代入得 C=4，选（D）

5.已知积分区域 $D = \{(x,y) \| x| + |y| \le \frac{\pi}{2}\}$，

$I_1 = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y, I_2 = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y, I_3 = \iint\limits_D (1-\cos\sqrt{x^2+y^2})\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$，试比较 I_1, I_2, I_3 的大小

A. $I_3 < I_2 < I_1$

B. $I_1 < I_2 < I_3$

C. $I_2 < I_1 < I_3$

D. $I_2 < I_3 < I_1$

解析：

因为 $\sin\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{x^2+y^2}$

$1 - \cos\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore I_2 < I_1 \quad I_3 < I_1$

因为$1-\cos\sqrt{x^2+y^2}=2\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

$\sin\sqrt{x^2+y^2}=2\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

因为$x^2+y^2<\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{\pi}{4}$

$\therefore\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

$\therefore 1-\cos\sqrt{x^2+y^2}<\sin\sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore I_3<I_2$

$\therefore I_3<I_2<I_1$

选 A

6.已知$f(x),g(x)$二阶导数且在$x=a$处连续，请问$f(x),g(x)$相切于a且曲率相等是

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$的什么条件？

A.充分非必要条件.
B.充分必要条件.
C.必要非充分条件.
D.既非充分又非必要条件.
解析：
必要性

$f(x),g(x)$相切于 a 则$f(a)=g(a)$ $\qquad f'_{(a)}=g'_{(a)}$

$P=\frac{|y''|}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}.$ $\qquad y''(a)=\pm g''(a)$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-e)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=\frac{f''(a)-g''(a)}{2}=\begin{cases}0\\2f''(a)\end{cases}$$

充分性

$$O=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2} \qquad \therefore f(a)=g(a)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'_{(x)}-g'_{(x)}}{2(x-a)} \qquad \therefore f'(a)=g'(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=\frac{f''(a)-g''(a)}{2} \qquad \therefore f''(a)=g''(a)$$

f(x)与 g(x)相切于点 a.且曲率相等.选择（B）

7.设 **A** 是四阶矩阵，A^*是 **A** 的伴随矩阵，若线性方程 **Ax=0** 的基础解系中只有 2 个向量，则 A^*的秩是（　）

A.0

B.1

C.2

D.3

解析：

因为 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量 $\therefore n-r(A)=2=4-r(A)$

$\therefore r(A^*)=0$　　$\therefore$ 选 A

8.设 **A** 是 3 阶实对称矩阵，**E** 是 3 阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$.且$|A|=4$，则二次型 x^TAx 规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$

D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

解析：

由 $A^2+A=2E$ 得 $\lambda^2+\lambda=2$，λ 为 A 的特征值，

$\lambda=-2$ 或 1，

又$|A|\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，故 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，

规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$，选（C）

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim_{x\to0}\left(x+2^x\right)^{\frac{2}{x}}=$________.

解析：

$$\lim_{x\to0}\left(x+2^x\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}(1+x+2^x-1)^{\frac{1}{x+2^x-1}\cdot\frac{(x+2^x-1)\cdot2}{x}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{(x+2^x-1)\cdot2}{x}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{2+2\cdot2^x\ln2}{1}}=e^{2+2\ln2}$$

10. 曲线$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$在$t = \dfrac{3}{2}\pi$对应点处切线在 y 轴上的截距为________.

解析：当$t = \dfrac{3}{2}\pi$时，$x = \dfrac{3}{2}\pi - \sin\dfrac{3}{2}\pi = \dfrac{3}{2}\pi + 1$ $y = 1 - \cos\dfrac{3}{2}\pi = 1$，即为点$\left|\dfrac{3}{2}\pi + 1, 1\right|$

$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \sin\frac{1}{1 - \cos t} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t = \frac{2}{3}\pi} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y - 1 = -\left|x - \frac{3}{2}\pi - 1\right| \Rightarrow y - 1 = -x + \frac{3}{2}\pi + 1.$$

$$\Rightarrow y = -x + \frac{3}{2}\pi + 2$$

在 y 轴上的截矩为$\dfrac{3}{2}\pi + 2$

11. 设函数 $f(u)$ 可导，$z = yf(\dfrac{y^2}{x})$，则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} =$________.

解析：

$$\frac{z}{x} = y \ f \ \left|-\frac{y^2}{x^2}\right| = -\frac{y^3}{x^2} f \ ; \ \frac{z}{y} = f + y \ f \ \left|\frac{2y}{x}\right| = f + \frac{2y^2}{x} f$$

$$2x\frac{z}{x} + y\frac{z}{y} = -2x \cdot \frac{y^3}{x^2} f \ + y \cdot \ f + \frac{2y^2}{x} f$$

$$= -\frac{2y^3}{x} f \ + yf + \frac{2y^3}{x} f$$

$$= yf\left|\frac{y^2}{x}\right|$$

12. 设函数 $y = \ln\cos x (0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6})$的弧长为________.

解析：

$$y = \ln\cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$$

13. 已知函数 $f(x) = x\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$，则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx =$________.

解析：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t\Big|_0^1-\int_0^1 x^2\cdot\frac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\int_0^1 x\sin x^2\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2\,\mathrm{d}x^2=-\frac{1}{4}(-\cos x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\cos 1-1)$$

14. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|A|$ 中（i，j）元的代数余子式，则 $A_{11}-A_{12}=$________.

解析：

$$A_{11}-A_{12}=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&1&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&3&4\end{vmatrix}=-4$$

三、解答题:15~23 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本题满分 10 分）

已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x},x>0\\ xe^x+1,x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

解析：当 $x>0$ 时　$f(x)=x^{2x}=\mathrm{e}^{2x\ln x}$　$f'(x)=\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2)$

当 $x<0$ 时　$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$

当 $x=0$ 时　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\mathrm{e}^x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^x=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^{2x}+1-1}{x}$ 不存在

$\therefore$ 有 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导.

于是

$$f'(x)=\begin{cases}e^{2x\ln x}(2\ln x+2), & x>0\\ 不存在, & x=0\\ e^x+xe^x, & x<0\end{cases}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{e}, x_2=-1$, 于是有下列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1，0)	0	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↗	极大值	↓	极小值	↗

于是有 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$，极大值为 $f(0)=1$

16.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx.$

解析：

令

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

则 $3x+6=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2$

令 $x=1$ 得 $9=3B, B=3$

令 $x=0$ 得 $6=-A+B+D$

令 $x=-1$ 得 $3=-2A+B+4(D-C)$

令 $x=2$ 得 $12=7A+7B+2C+D$

解得 $A=-2, B=3, C=2, D=1$

故原式 $=-2\quad\frac{1}{x-1}dx+3\quad\frac{1}{(x-1)^2}dx+\quad\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$$

17.（本题满分 10 分）

$y=y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足 $y(1)=\sqrt{e}$ 特解.

（1）求 $y(x)$:

（2）设平面区域 $D=\{(x,y)\}, D=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\right\}$ 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解析：（1）$y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$

通解 $y=e^{\int xdx}\left[\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\int(-x)dx}dx+C\right]$

$=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx+C\right]$

$=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+C\right]$

$=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{x}+C\right)$

由 $f(1)=\sqrt{e}=(C+1)\sqrt{e}$ 得 $C=0$

所以 $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

$V_x=\pi\int_1^2\left[\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right]^2dx$

（2） $=\pi\int_1^2 x\cdot e^{x^2}dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_1^2 e^{x^2}dx^2=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}\left(e^4-e\right)$

18.已知平面区域 D 满足 $|x|\leqslant y,(x^2+y^2)^3\leqslant y^4$，求 $\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

解析：

$(x^2+y^2)^3=y^4$ 的极坐标方程为 $r=\sin^2\theta$，由对称性：

$$\iint\limits_{D}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D}\frac{r\sin\theta}{r}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\sin^2\theta}r\sin\theta\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^2\,\mathrm{d}\cos\theta$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)\,\mathrm{d}\cos\theta$$

$$=-\left[\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\right]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{32}\right]=\frac{43}{120}\sqrt{2}$$

19. $n\in\mathrm{N}_+$，S_n 是 $f(x)=e^{-x}\sin x,0\leqslant x\leqslant n\pi$ 的图像与 x 轴所围图形的面积，求 S_n，并求 $\lim\limits_{x\to\infty}s_n$

解析：

设在区间 $[k\pi,(k+1)\pi](k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 上所围的面积记为 u_k，则

$$u_k=\int_{k\pi}^{(k+1)x}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x=(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)x}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x;$$

记 $I=\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$，则

$$I=-\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\cos x=-(\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\cos x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-(\mathrm{e}^{-x}\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-I$$

所以 $I=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)+C$；

因此

$$u_k=(-1)^k\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-k}(\cos x+\sin x)\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}+\mathrm{e}^{-k\pi});$$

(这里需要注意 $\cos k\pi=(-1)^k$)

因此

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-k\pi}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi}-\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}};$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\pi}-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$$

20. 已知函数 $u(x,y)$满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$，求 a，b 的值，使得在变换 u（x，y）$=v$（x，y）e^{ax+by} 下，上述等式可化为 $v(x，y)$不含一阶偏导数的等式。

解析：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+v(x,y)a\,e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+v(x,y)a\,e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+\frac{\partial v}{\partial x}a\,e^{ax+by}+a\left[\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+v(x,y)a\,e^{ax+by}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+\frac{\partial v}{\partial x}2a\,e^{ax+by}+v(x,y)a^2e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+\frac{\partial v}{\partial y}2b\,e^{ax+by}+v(x,y)b^2e^{ax+by}$$

代入已知条件

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

得 $2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+4a\frac{\partial v}{\partial x}+(3-4b)\frac{\partial v}{\partial y}+(2a^2-2b^2+3b)v(x,y)=0$

根据已知条件，上式不含一阶偏导，故 $a=0,3-4b=0$

即 $a=0,b=\frac{3}{4}$

21.已知函数 $f(x,y)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$；

（2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2.$

解析：

证：（1）设 $f(x)$ 在 ξ 处取得最大值，

则由条件 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$

可知 $f(\xi)>1$，于是 $0<\xi<1$，

由费马引理得 $f'(\xi)=0$.

（2）若不存在 $\eta\in(0,1)$，使 $f\ (\eta)<-2$，

则对任何 $x\in(0,1)$，有 $f\ (x)\geq-2$，

由拉格朗日中值定理得，

$f\ (x)-f\ (\xi)=f\ \ (c)(x-\xi)$，$C$ 介于 x 与 ξ 之间，

不妨设 $x<\xi$，$f'(x)\le -2(x-\xi)$，

积分得 $\int_0^{\xi} f'(x)\mathrm{d}x \le -2\int_0^{\xi}(x-\xi)\mathrm{d}x=\xi^2<1$，

于是 $f(\xi)-f(0)<1$，即 $f(\xi)<1$，

这与 $f(\xi)>1$ 相矛盾，故存在 $\eta\in(0,1)$, 使 $f\ \ (\eta)<-2$.

22.已知向量组（Ⅰ）$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$,

（Ⅱ）$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$, 若向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）等价，求 a 的取值，并将 β_3，用 a_1,a_2,a_3 线性表示.

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$$

①若 a=1，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

此时向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，

令　$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，

则　$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

此时 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=2\alpha_1-2\alpha_2\\ \beta_3=3\alpha_1-2\alpha_2\end{cases}$

②若 a=-1，则 $r(A)=2\ne r(A,B)=3$，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）不等价.

③若 $a\neq 1,-1$，则 $(A,B)\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{a-1}{a+1}&\frac{2a+1}{a+1}&1\\0&1&0&\frac{1}{a+1}&-\frac{2a+3}{a+1}&-1\\0&0&1&\frac{1}{a+1}&-\frac{1}{a+1}&1\end{pmatrix}$

此时 $\begin{cases}\beta_1=\frac{a-1}{a+1}a_1+\frac{1}{a+1}a_2+\frac{1}{a+1}a_3\\ \beta_2=\frac{2a+1}{a+1}a_1-\frac{2a+3}{a+1}a_2-\frac{1}{a+1}a_3\\ \beta_3=a_1-a_2+a_3\end{cases}$

23.已知矩形 $A=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似，

（Ⅰ）求 x,y；

（Ⅱ）求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$

解析：（1）

（1）

$\because A \sim B$

$\therefore tr(A)=tr(B), |A|=|B| \Rightarrow \begin{cases} x-4=1+y \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

$(2)|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(x-2)=0$

$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=2$

$\lambda=-1$时, $A+E=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_1=(-2,1,0)^T$

$\lambda=-2$时, $A+2E=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 10 & -4 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_2=(-1,2,4)^T$

$\lambda=2$时, $A-2E=\begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_3=(-1,2,0)^T$

令$P_1=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 　　有$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda=-1$时, $B+E=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_1=(-1, 3, 0)^T$

$\lambda=-2$时, $B+2E=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2=(0, 0, 1)^T$

$\lambda=2$时, $B-2E=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_3=(1, 0, 0)^T$

令$P_2=(x_1, x_2, x_3)$ 　　有$P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

$B=P_2P_1^{-1}APP_2^{-1}$, 故$P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$