2019 考研数学三考试真题及答案详解

来源：文都教育

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$

A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

解析：

$\because x-\tan x\sim -\dfrac{x^3}{3}$ 若要 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，$\therefore k=3$

$\therefore$ 选 C

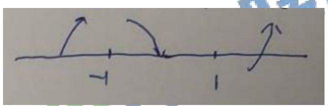
2. 已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有 3 个不同的实根，则 k 的取值范围为

A. $(-\infty,-4)$ B. $(4,+\infty)$

C. $(-4,4)$ D. $(-4,4)$

解析：

令 $f(x)=x^5-5x+k,\quad f'(x)=5x^4-5=0,\quad x=\pm 1$



$x\in(-1,1)$时，$f'(x)<0, f(x)\downarrow,$

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

极大值为 $f(-1)=-1+5+k=4+k$

极小值为 $f(1)=1-5+k=k-4$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

若要 $x^5-5x+k=0$ 有 3 个不同的实根

$\therefore\ f(-1)>0\quad f(1)<0$ 即 $4+k>0\quad k-4<0$

$\therefore\ -4<k<4$ 即k的取值范围为 $(-4,4)$ 选 D。

3. 已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$，则 a、b、c 依次为

A. 1，0，1 B. 1，0，2

C. 2，1，3 D. 2，1，4

解析：$\because$通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$

∴ e^{-x}, xe^{-x} 为$y''+ay'+by=0$ 的两个解.即 $\lambda=-1$ 为重根.

$\lambda^2+a\lambda+b=0\Rightarrow 1-a+b=0 \quad \Delta=a^2-4b=0\Rightarrow a=2,b=1,$

∴ e^x 为 $y''+2y'+y=ce^x$ 的特解，

将 $y=e^x$ 代入 $e^x+2e^x+e^x=ce^x\Rightarrow c=4$

∴ $a=2,b=1,c=4$，∴ 选 D.

4. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛，则（ ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散

解析：

$\because \sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛， $\because |u_n|\le|nu_n|$， $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛. $\therefore$ $\frac{v_n}{n}$ 有界. 不妨设 $\left|\frac{v_n}{n}\right|<M$

$\therefore |u_nv_n|\le M|u_n|$ $\because \sum_{n=1}^{\infty} M|u_n|$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 绝对收敛. 故选 B

5.设 A 是四阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，则 A^* 的秩是（ ）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解析：

$\because Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量 $\therefore n-r(A)=2=4-r(A)$，$\therefore r(A)=2$

$\therefore r(A^*)=0$ ∴ 选 A

6.设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$ 且 $|A|=4$，则二次型 X^TAX 的规范形为（ ）

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$

D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

解析：

由 $A^2+A=2E$ 得 $\lambda^2+\lambda=2$，λ 为 A 的特征值， $\lambda=-2$ 或 1，

又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，故 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1,$ 规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$，选（C）

7. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.

D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

解析：

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

$\because P(A)=P(B)$ $\therefore P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$，选（C）.

8.设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$

A.与 μ 无关，而与 σ^2 有关.

B.与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

C.与 μ，σ^2 都有关.

D.与 μ，σ^2 都无关.

解析：

因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$, 且 X 与 Y 相互独立， $\therefore X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$

$\therefore P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$

$\therefore$ 与 μ 无关，而与 σ^2 有关， 选（A）.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^n=$.

解析：

$$\lim_{n}\left|\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right|^{n}=\lim_{n}\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

10. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\ \left|-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right|$ 的拐点坐标为.

解析：

$$y=x\sin x+2\cos x\left|-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right|$$

$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x\quad =x\cos x-\sin x$

令 $y\ (x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x=0$，得 $x=0,\ x=\pi$

$x<0$ 时，$y\ (x)<0$

$x>0$ 时，$y\ (x)<0$，所以 x=0 不为拐点.

$0<x<\pi$ 时，$y\ (x)<0$

$\frac{3\pi}{2}>x>\pi$ 时，$y\ (x)>0$

拐点为 $(\pi,-2)$

11. 已知 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$.

解析：

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\left(\int_1^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\int_1^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^3\int_1^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\,\Big|_0^1-\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}(1+x^4)$$

$$=-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=-\frac{1}{18}(2\sqrt{2}-1)=\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$$

12. A、B 两商品的价格分别为 P_A、P_B，需求函数 $Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$，求 $P_A=10, P_B=20$ 时 A 商品对自身价格的需求弹性 $\eta_A=(\eta>0)$

解析：

$$\eta_A=\frac{P_A}{Q_A}\cdot\frac{\partial Q_A}{\partial P_A}\quad=-\frac{P_A}{500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2}\cdot(-2P_A-P_B)\quad=\frac{P_A(2P_A+P_B)}{500-P_A^2P_AP_B+2P_B^2}$$

故 $P_A=10, P_B=20$ 时，$\eta=\frac{10\times 40}{500-100-200+800}=\frac{400}{1000}=0.4$

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & a^2-1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ a\end{pmatrix}$，$AX=b$ 有无穷多解，则 a=.

解析：

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & a^2-1 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a^2-1 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1\end{array}\right)$$

当 a=1 时　$r(A)=r(A\vdots b)=2<3$，AX=b 有无穷多解.

14. X 为连续型随机变量，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, 0<x<2\\ 0, else\end{cases}$. $F(x)$为 X 的分布函数，EX 为 X 的期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$.

解析：

X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$EX=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$P\{F(X)\ge EX-1\}=P\{F(X)\ge\frac{1}{3}\}=P\{\frac{X^2}{4}\ge\frac{1}{3}\}=$$

$$=P\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}<X<2\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}=\frac{2}{3}$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, x>0\\ xe^x+1,\ x\le 0\end{cases}$　求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

解析：当 $x>0$ 时　$f(x)=x^{2x}=\mathrm{e}^{2x\ln x}$, $f'(x)=\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2)$

当 $x<0$ 时　$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$

当 $x=0$ 时　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\mathrm{e}^x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^x=1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}+1-1}{x}$ 不存在

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导.

于是

$$f'(x)=\begin{cases} e^{2x\ln x}(2\ln x+2),\ x>0 \\ 不存在,\ x=0 \\ e^{x}+xe^{x},x<0 \end{cases}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{e}, x_2=-1,$ 于是有下列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	（-1，0）	0	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↗	极大值	↓	极小值	↗

于是 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$，极大值为 $f(0)=1$

16.已知 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

解析：

$$g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_u'(x+y,x-y)-f_v'(x+y,x-y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-f_{uu}''-f_{uv}''-f_{vu}''-f_{vv}''$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_u'+f_v'$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_{uu}''+f_{uv}''+f_{vu}''-f_{vv}''$$

$$\frac{x^2 g}{\partial x\partial y}=1-f_{uu}''+f_{uv}''-f_{vu}''+f_{vv}''$$

所以：$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial xg}{\partial y^2}=-f_{uu}''-f_{uu}''-f_{vv}''+1-f_{uu}''=1-3f_{uu}''-f_{vv}''$$

17. 已知 $y(x)$ 满足微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 且满足 $y(0)=\sqrt{e}$

（1）求 $y(x)$；

（2）$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\right\}$ 求平面区域 D 绕 x 轴旋转成的旋转体体积

解析：

（1）$y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

通解 $y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left[\int\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\int -x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left[\int\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C\right]$

$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left[\int\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{x}+C\right)$

由 $f(1)=\sqrt{\mathrm{e}}=(C+1)\sqrt{\mathrm{e}}$ 得 $C=0$，所以 $f(x)=\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

（2）

$V_x=\pi\int_1^2\left[\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right]^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x\cdot\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_1^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_1^2=\dfrac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^4\text{-}\mathrm{e}\right)$

18.求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\ge 0)$ 与 x 轴之间围成的图形面积.

解析：

$x\in[2k\pi,2k\pi+\pi)$ 时

$S_1=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$

$=-\sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}\Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}+\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$

$=-\cos x\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}+\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}(-\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}+\mathrm{e}^{-2k\pi}-S_1$

$=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}+\mathrm{e}^{-2k\pi}\right)$

$x\in[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$

$S_2=\int_{2k\pi+\pi}^{(2k+2)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\sin x\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}\text{-}\int_{2k\pi+\pi}^{(2k+2)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$

$=\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=-\cos x\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_{2k\pi+\pi}^{(2k+2)\pi}\text{-}\int_{2k\pi+\pi}^{2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}(-\sin x)\mathrm{d}x$

$=-\mathrm{e}^{-(2k+2)\pi}+\mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}-S_2=\dfrac{-1}{2}\left(\mathrm{e}^{-(2k+2)\pi}+\mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}\right]$

面积为

$$\sum_{k=0} S_1 - S_2 = \sum_{k=0} \frac{1}{2}\left(2e^{-(2k+1)\pi} + e^{-2k\pi} + e^{-(2k+2)\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+2e^{-\pi}+e^{-2\pi}\right)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k\pi}=\frac{1}{2}\left(1+2e^{-\pi}+e^{-2\pi}\right)\frac{1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\pi}+1}{2\left(e^{\pi}-1\right)}$$

19.设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\cdots)$.

（1）证明$\{a_n\}$单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

解析：

（1）$a_n-a_{n-1}=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$. 则$\{a_n\}$单调递减.

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot\cos^2 tdt=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot(1-\sin^2 t)dt=I_n-I_{n+2}=\frac{1}{n+2}I_n,$$

则 $a_{n-2}=\frac{1}{n}I_{n-2}$, 则$a_n=\frac{n-1}{n(n+2)}I_{n-2}=\frac{n-1}{(n+2)}a_{n-2}$.

（2）由（1）知，$\{a_n\}$单调递减，则 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\frac{n-1}{n+2}a_{n-1}$, 即$\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$.

由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

20.已知向量组（Ⅰ）$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$,

（Ⅱ）$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$，若向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）等价，求 a 的取值，并将 β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解析：

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$$

①若 a=1，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，此时向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

则

$$(A\vdots\beta_3)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

此时 $\beta_3=(3-2k)\alpha_1+(-2+k)\alpha_2+k\alpha_3$

②若 a=-1，则 $r(A)=2\neq r(A,B)=3$，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）不等价.

③若 $a\neq 1,-1$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，此时向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，

$$(A\vdots\beta_3)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

此时 $\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

21.已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似，

（Ⅰ）求 x，y;

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

解析：

（1）

$\because A \sim B$

$\therefore tr(A)=tr(B), |A|=|B|, \Rightarrow \begin{cases} x-4=1+y \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

$(2)\,|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(x-2)=0$

$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=2$

$\lambda=-1$时, $A+E=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_1=(-2,1,0)^T$

$\lambda=-2$时, $A+2E=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_2=(-1,2,4)^T$

$\lambda=2$时, $A-2E=\begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_3=(-1,2,0)^T$

令$P_1=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 有$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

$$\lambda=-1\text{时}, B+E=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \alpha_1=(-1,3,0)^T$$

$$\lambda=-2\text{时}, B+2E=\begin{bmatrix}4&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \alpha_2=(0,0,1)^T$$

$$\lambda=2\text{时}, B-2E=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \alpha_3=(1,0,0)^T$$

$$\text{令}P_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\qquad \text{有}P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&2\end{bmatrix}$$

$$B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1},\text{故}P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\1&2&2\\0&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\\1&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{bmatrix}$$

22.设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p$.令 $Z=XY$.

（1）求 Z 的概率密度；

（2）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（3）X 与 Z 是否相互独立？

解析：

（1）随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}\\&=P\{X\le z,Y=1\}+P\{X\ge -z,Y=-1\}\\&=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z))\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=p(1-F_X(-z))=pe^{z}$

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z))=(1-p)(1-e^{-z})+p$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}(1-p)e^{-z}, & z>0\\ pe^{z}, & z\le 0\end{cases}$

（2） $EX=1, EZ=E(XY)=EX\cdot EY=1-2p$

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=\left(DX+(EX)^2\right)(1-2p)=2(1-2p)$

当 $E(XZ)=E(X)E(Z)$ 时，X,Z 不相关. 即 $1-2p=2(1-2p)$，可得 $p=\frac{1}{2}$.

（3）因为 $P\{X\le 1, Z\le -1\}=P\{X\le 1, Y=-1, X\ge 1\}=0$

又 $P\{X\le 1\}=1-e^{-1}$，$P\{Z\le -1\}=pe^{-1}$

则 $P\{X\le 1, Z\le -1\}\ne P\{X\le 1\}\cdot P\{Z\le -1\}$，故不独立.

23.设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$ μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

解析：

（1）由 $\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=A\sqrt{2}\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}=\frac{A\sqrt{2\pi}}{2}=1$ 可得：$A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值，似然函数为

$$L(\sigma^2)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma^n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu\\ 0, & else\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$ 时，

$$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}(\ln 2-\ln\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $\frac{d\left(\ln L(\sigma^2)\right)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$，可得 $\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\mu)^2}{n}$

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_1-\mu)^2}{n}$.